Baccalauréat STI 2004

L'intégrale de juin à novembre 2004

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Métropole Arts appliqués juin 2004 3
Métropole Arts appliqués septembre 2004 5
La Réunion Génie civil juin 2004 7
Métropole Génie civil juin 2004 11
Polynésie Génie civil juin 2004 14
Métropole Génie civil septembre 2004 16
Nouvelle-Calédonie Génie civil novembre 2004 .20
Métropole Génie électronique juin 2004 22
Polynésie Génie électronique juin 2004 25
Métropole Génie électronique septembre 2004 28
Nouvelle-Calédonie Génie électronique novembre 2004 31
Métropole Génie des matériaux juin 2004 33
Métropole Génie des matériaux septembre 2004 35

Baccalauréat STI Arts appliqués– Métropole juin 2004

EXERCICE 1 **8 points**

Sophie et Luc jouent très mal aux échecs, c'est pourquoi ils ont inventé le jeu suivant :
Sophie possède un sac contenant cinq pièces blanches : une reine, une tour, deux cavaliers et un pion.
Le sac de Luc contient cinq pièces noires : une reine, deux tours, et deux pions.
Principe du jeu :
Chacun tire une pièce de son sac, celui qui a la pièce la plus forte gagne la partie.
Une reine bat toutes les autres pièces.
Une tour bat un cavalier ou un pion.
Un cavalier bat un pion.
Deux pièces identiques font partie nulle.
Exemples :
Sophie tire une reine et Luc une tour : Sophie gagne la partie.
Sophie et Luc tirent tous les deux un pion : il y a partie nulle.

1. Dans le tableau ci-dessous, chaque case correspond à une issue possible du jeu.

Sophie \ Luc	R	T_1	T_2	P_1	P_2
R					
T					
C_1					
C_2					
P					

   Recopier ce tableau et compléter chaque case :
   — Par un S lorsque Sophie gagne.
   — Par un L lorsque Luc gagne.
   — Par un N lorsque la partie est nulle.
   On suppose les tirages équiprobables.

2. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   a. A : « La partie est nulle ».
   b. B : « Sophie gagne ».
   c. C : « Luc gagne ».

3. Y a-t-il, du point de vue du contenu des sacs, un joueur avantagé par rapport à l'autre ?
   Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **12 points**

Un musée souhaite orner ses publications d'un motif en filigrane.
Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 5 cm.
L'axe des ordonnées sera centré sur la feuille de papier millimétré.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~1]$ par :

$$f(x) = 2\text{e}^x - 4x.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. f' désignant la fonction dérivée de f, calculer $f'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0.
3. Tracer avec soin la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente T en A.
4. Calculer l'intégrale $\mathrm{I}_f = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$g(x) = \ln(x+1).$$

On appelle $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction g. Dresser son tableau de variations.
2. Tracer avec soin la courbe $\mathscr{C}_g$ dans le même repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ que précédemment.
3. Soit G la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$G(x) = (x+1)\ln(x+1) - (x+1).$$

   a. Vérifier que G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   b. Calculer l'intégrale $\mathrm{I}_g = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie C : constitution du motif

On nomme P le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1 et Q le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse 1.
La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées transforme les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, respectivement en courbes $\mathscr{C}'_f$ et $\mathscr{C}'_g$ (les points P et Q ayant pour images respectives P$'$ et Q$'$).
Tracer les courbes $\mathscr{C}'_f$ et $\mathscr{C}'_g$ ainsi que les segments [PQ] et [P$'$Q$'$].
Le domaine limité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}'_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}'_g$ ainsi que par les segments [PQ] et [P$'$Q$'$] constitue le motif que cherche à reproduire le musée.
Expliquer comment on peut calculer l'aire de ce motif et calculer cette aire en cm^2 (on donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près).

Baccalauréat STI Arts appliqués Métropole septembre 2004

EXERCICE 1 **8 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Parmi les réponses proposées à chaque question ou sous-question, une seule est correcte. Dans chaque cas une seule réponse est attendue : on indiquera seulement sur la copie la réponse exacte (aucune justification n'est demandée). Toutes les questions sont indépendantes. Chaque réponse exacte rapporte un point.

1. Des jetons contenus dans une urne peuvent être de 3 formes (ronds, carrés ou triangulaires) et de 4 couleurs (rouge, bleu, vert ou jaune). Toutes les possibilités de formes et de couleurs sont présentes dans l'urne. Le nombre de jetons différents est :

81   7   12   64

2. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes, la probabilité de l'évènement « tirer une dame ou un cœur » est :

$\dfrac{12}{32}$ $\dfrac{1}{11}$ $\dfrac{11}{32}$ $\dfrac{1}{12}$

3. On considère un repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique, dans ce repère, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 20$. Une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 est :

$y = 2x + 14$ $y = 3x$ $y = 18$ $y = 3x + 12$

4. On considère un repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique, dans ce repère, de la fonction f définie sur $]2 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x-4}{x-2}$. Cette courbe admet comme asymptote la droite d'équation :

$y = 2$ $y = 3x - 4$ $x = 2$ $y = x - 2$

5. L'équation $\ln(x+3) + \ln(x+5) = \ln 15$ admet pour ensemble de solutions :

$\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$ $\{0\}$ $\{0 ; -8\}$ $\left\{1 ; e^{-8}\right\}$

6. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $25x^2 + 36y^2 - 900 = 0$.

a. La courbe $\mathcal{C}$ est :

une ellipse   un cercle   une hyperbole   une parabole

b. Un de ses foyers F a pour coordonnées dans le repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$:

$F\left(0 ; \sqrt{11}\right)$ $F\left(\sqrt{11} ; 0\right)$ $F\left(0 ; \sqrt{61}\right)$ $F\left(\sqrt{61} ; 0\right)$

c. Un de ses sommets A a pour coordonnées :

$A(0 ; 5)$ $A(5 ; 0)$ $A(36 ; 0)$ $A(0 ; 36)$

EXERCICE 2 **12 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 4.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Recopier et compléter le tableau suivant, en donnant pour chaque valeur de x une valeur approchée de $f(x)$ à 10^{-1} près.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	1,5	2
$f(x)$								

2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote D dont on donnera une équation.

3. a. Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(1 - 5\mathrm{e}^{-x} + 4\mathrm{e}^{-2x}\right)$.

b. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

4. a. On note f' la fonction dérivée de f, calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout x réel $f'(x) = \mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 5\right)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

5. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - 5X + 4 = 0$ d'inconnue X.

b. À l'aide de la question **a.** et en posant $X = \mathrm{e}^{x}$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x.

c. En déduire les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

6. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et l'asymptote D dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

7. a. Déterminer une primitive F de la fonction f.

b. Hachurer sur le graphique la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 4$. On appelle $\mathscr{A}$ cette partie du plan.

c. On admet que la fonction f est négative sur l'intervalle $[0\,;\,\ln 4]$.
Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire de $\mathscr{A}$ puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie civil La Réunion juin 2004

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Soit $P(z) = z^3 - 8z - 32$, où z est un nombre complexe.

1. **a.** Calculer $P(4)$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 8 = 0$.

   c. Déterminer les réels, $a,~b,~c$ tels que : $P(z) = (z-4)\left(az^2 + bz + c\right)$.

   d. Déduire des questions précédentes la résolution de l'équation $P(z) = 0$.

2. Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 4 \quad ; \quad z_{\text{B}} - 2 + 2\text{i} \quad ; \quad z_{\text{B}} = -2 - 2\text{i}.$$

   a. Faire une figure, sur la copie, représentant les points A, B, C dans le repère.

   b. Déterminer le module et un argument des nombres complexe z_{B} et z_{C}.

   c. Déterminer, en justifiant, la nature du triangle OBC.

3. Soit Ω le point d'affixe $z_{\Omega} = \dfrac{2}{3}$.

   a. Déterminer les modules des nombres complexes $z_{\text{A}} - z_{\Omega}$, $z_{\text{B}} - z_{\Omega}$, $z_{\text{C}} - z_{\Omega}$.

   b. Que représente Ω pour le triangle ABC ?

EXERCICE 2 **4 points**

Dam un atelier de réparation un technicien s'occupe des ordinateurs **en panne** qui lui arrivent. Les composants à l'origine de la panne peuvent uniquement être : l'alimentation, la carte graphique ou le processeur.

Une panne simultanée de deux ou trois composants est possible.

Le technicien chargé de la détection des pannes établit le diagnostic d'un ordinateur à l'aide d'un triplet utilisant les initiales des composants, surmontées d'une barre en cas de panne.

Par exemple, $\left(\text{A}~;~\text{CG}~;~\overline{\text{P}}\right)$ signifie que l'alimentation et la carte graphique fonctionnent et que la panne provient du processeur.

1. Établir la liste des sept diagnostics possibles sur un ordinateur en panne.
2. On suppose que les sept diagnostics ont la même probabilité d'être établis. Quelle est la probabilité pour qu'un seul des composants soit en panne ?
3. Le tableau suivant donne le coût des composants à remplacer :

Composant	Alimentation	Carte graphique	Processeur
Prix en €	80	160	80

   Le coût d'une réparation est celui du remplacement des pièces auquel il faut **ajouter** un forfait de main-d'œuvre de 25 € **indépendant du nombre de composants à remplacer**.

   a. Soit X la variable aléatoire qui à chaque ordinateur en panne associe le coût de la réparation.

   Donner la liste des valeurs possibles de X.

b. Donner dans un tableau la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X. Arrondir le résultat à l'unité.

d. Quel devrait être le coût du forfait de la main-d'œuvre, arrondi à l'unité, pour que le prix moyen d'une réparation soit de 200 €.

PROBLÈME **11 points**

Ce problème a pour but de montrer un exemple de courbes représentatives de deux fonctions qui sont asymptotes, puis de calculer une aire comprise entre deux courbes.

Partie A : Détermination d'une fonction

On considère la courbe représentative $\mathscr{C}$, d'une fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$, dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1,5 cm en ordonnée.
Cette courbe est représentée sur le document fourni en annexe.
Les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses ont pour coordonnées respectives $(1~;~0)$ et $(3~;~0)$.

1. Soient a et b deux nombres réels tels que, pour tout réel $x \in]0~;~+\infty[$,

$$g(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x}.$$

En utilisant les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses, déterminer les nombres a et b.

2. Montrer que $g(x)$ peut s'écrire : $g(x) = x - 4 + \dfrac{3}{x}$.

Partie B Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction h définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$h(x) = x^2 + 1 - 2\ln x.$$

1. Étudier les variations de h et dresser son tableau de variations.

2. Calculer $h(1)$. En déduire que $h(x)$ est strictement positif pour tout nombre réel x de $]0~;~+\infty[$.

Partie C : Étude de fonction

On définit la fonction f par,

$$f(x) = x - 4 + \frac{1 + 2\ln x}{x}$$

sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$. On appellera Γ, la courbe représentative de f dans le repère orthogonal du document 1.

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers zéro. En déduire que Γ admet une asymptote que l'on précisera.

2. Calculer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

3. Pour tout x de $]0~;~+\infty[$ montrer que $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variations de f.

4. Courbes asymptotes. On rappelle que $g(x) = x - 4 + \dfrac{3}{x}$.

a. Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x) - g(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b. Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point d'intersection des courbes Γ et $\mathscr{C}$.

c. Sur $]0~;~+\infty[$ déterminer la position de la courbe Γ par rapport à la courbe $\mathcal{C}$.

5. Construire la courbe Γ sur le document fourni en annexe et **que l'on rendra avec la copie**.

Partie D : Calcul d'une aire comprise entre deux courbes

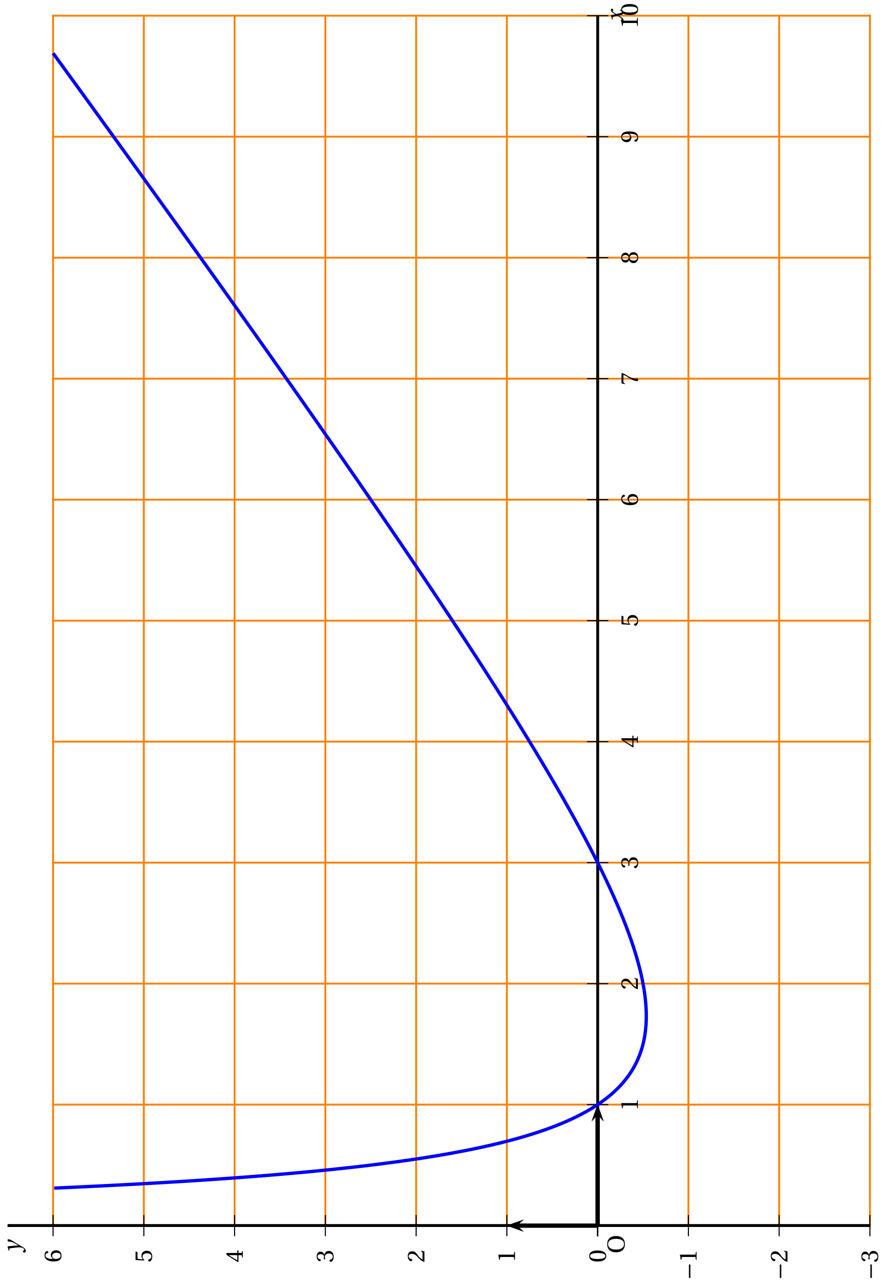
1. Montrer que $f(x) - g(x)$ admet pour primitive sur $]0~;~+\infty[$ la fonction K définie par :

$$K(x) = (\ln x - 1)^2.$$

2. Sur le document fourni en annexe, hachurer l'aire comprise entre les deux courbes et les droites d'équations $x = \mathrm{e}$ et $x = \mathrm{e}^2$.

3. Calculer la valeur de cette aire en cm^2.

Document à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie civil Métropole juin 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 2 cm.
Le nombre i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Soit trois nombres complexes

$$z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i} \quad ; \quad z_2 = \frac{z_1^2}{2} \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{4}{z_2}.$$

a. Déterminer le module et un argument de z_1.

b. Écrire sous la forme $a + b\mathrm{i}$ les complexes z_2 et z_3.

2. Soit quatre nombres complexes

$$z_A = \sqrt{3} + \mathrm{i},\ z_B = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3},\ z_C = -\sqrt{3} + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_D = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

a. Montrer que les points A, B, C et D d'affixes respectives z_A, z_B, z_A et z_D sont sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
Tracer le cercle dans le plan complexe et placer les points A, B, C et D.

b. Calculer $|z_C - z_B|$ et $|z_D - z_A|$.

c. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$; vérifier que $\overrightarrow{CD} = -\left(\sqrt{3}+2\right)\overrightarrow{AB}$.

d. Indiquer si les propositions suivantes sont justes ou fausses ; justifier vos réponses.

- AD = BC ;
- CD = 3AB ;
- ABCD est un trapèze isocèle.

EXERCICE 2 **4 points**

Une association de randonneurs organise un repas. Elle fixe le prix de la manière suivante :

- le tarif pour un enfant âgé de 10 ans ou moins est de 5 € ;
- le tarif pour un jeune âgé de 11 à 16 ans est de 8 € ;
- dans les autres cas le tarif est de 10 €.

De plus, tout membre de l'association bénéficie d'une réduction de 20 % appliquée au tarif le concernant. Ainsi, un membre âgé de 11 à 16 ans paiera 6,40 €.
Les participants au repas, au nombre de 600, sont répartis selon le tableau ci-dessous :

Participant	10 ans ou moins	entre 11 et 16 ans	plus de 16 ans	Total
membre	50	40	110	200
non-membre	110	100	190	400
Total	160	140	300	600

Partie A
On choisit au hasard une personne ayant participé au repas.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit membre de l'association ?

2. Quelle est la probabilité qu'elle paye plus de 7 € ?
3. On considère la variable aléatoire X égale au prix du repas pour un participant choisi au hasard. Vérifier que la probabilité pour que X prenne la valeur 6,40 est égale à $\dfrac{1}{15}$.
4. Déterminer les valeurs prises par X, puis donner la loi de probabilité de X.
5. Déterminer l'espérance mathématique de X, notée $\text{E}(X)$ (calculer la valeur exacte sous forme de fraction, puis une valeur décimale approchée à 0,01 près).

Partie B

Calculer la recette totale perçue par l'association à l'occasion de ce repas.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = -x + \ln(2x+2) - \ln(x+2).$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (4 cm pour une unité en abscisses et 8 cm pour une unité en ordonnées).

Préliminaires :

1. Montrer que sur $]-1\ ;\ +\infty[$, $(2x+2) > 0$ et $(x+2) > 0$.
2. Étudier le signe de x^2+3x+1 sur $\mathbb{R}$ et en déduire que sur $]-1\ ;\ +\infty[$, x^2+3x+1 s'annule pour une et une seule valeur α dont on donnera la valeur exacte.

Partie A : Limites et asymptotes

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x)$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
2. **a.** Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = -x + \ln 2 + \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$.

   b. Déterminer alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   c. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x + \ln(2)$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

   d. Déterminer la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

Partie B : étude des variations

1. Calculer la dérivée f' de f et montrer que $f'(x) = -\dfrac{x^2+3x+1}{(x+1)(x+2)}$.
2. À l'aide des résultats obtenus dans les préliminaires, étudier le signe de f' sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
3. Construire le tableau de variations de la fonction f (on se contentera d'une valeur décimale approchée à 10^{-1} près de l'extremum de f).

Partie C : Représentation graphique

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans l'intervalle $[-0,8\ ;\ -0,4]$, une solution unique notée β.

   Donner un encadrement de β à 10^{-2} près.
2. Déterminer une équation de la droite T tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

3. Reproduire et compléter le tableau suivant : (on donnera les résultats arrondis à 10^{-1} près) :

x	$-0,8$	$\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$	0	0,5	1	2
$f(x)$						

4. Représenter graphiquement la droite T, les asymptotes et $(\mathscr{C})$ dans le repère donné.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Polynésie juin 2004 ∾
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = \text{i} \quad ; \quad b = 1-2\text{i} \quad ; \quad c = 3+2\text{i} \quad ; \quad d = -1+4\text{i} \quad ; \quad e = -3.$$

On considère aussi l'application f qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \text{i}z - 1 + \text{i}$.

1. Placer les points A, B, C, D et E clans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
2. Étude de quelques cas particuliers.
   a. Vérifier que l'image de A par f est le point A lui-même et que l'image de B est le point C.
   b. Déterminer les images de C, D et E par f.
3. Étude du quadrilatère BCDE.
   a. Calculer $\dfrac{b+d}{2}$ et $\dfrac{c+e}{2}$; qu'en déduit-on pour le quadrilatère BCDE ?
   b. Calculer $|d-b|$ et $|e-c|$. Quelle information supplémentaire obtient-on sur le quadrilatère BCDE ?
   c. Montrer BC = BE et en déduire la nature exacte du quadrilatère BCDE.

EXERCICE 2 **4 points**

Une urne opaque contient 25 boules de deux couleurs, indiscernables au toucher : 6 rouges et 19 jaunes.
Parmi les rouges, trois portent le nombre 0, deux le nombre 5 et une le nombre 10 ; parmi les jaunes, dix portent le nombre 0, cinq le nombre 1, deux le nombre 5 et deux le nombre 10.

1. On tire une boule de l'urne, au hasard ; tous les tirages sont équiprobables.
   Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   a. A : « la boule tirée ne porte pas le nombre 0 ».
   b. B : « la boule tirée est rouge et porte un nombre pair ».
   c. C : « la boule tirée est jaune ou porte un nombre impair ».
   (*Les résultats seront donnés sous forme décimale exacte*)
2. On organise une tombola.
   Pour participer à une partie, un joueur doit miser 2 euros. Il tire ensuite une boule de l'urne. Si cette boule est jaune, il reçoit une somme en euros égale au nombre inscrit sur la boule ; si elle est rouge, il reçoit une somme en euros égale au double du nombre inscrit sur la boule.
   On appelle « gain » du joueur la différence entre la somme reçue et la mise :
   Exemples :
   si le joueur tire une boule jaune portant le nombre 1, son « gain » est égal à -1 euro.
   si le joueur tire une boule rouge portant le nombre 5, son « gain » est égal à 8 euros.
   On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le « gain » du joueur.

a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer, en détaillant le calcul, l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat.

PROBLÈME **11 points**

I. Première partie

1. Découverte d'une fonction f

a. Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ où y est une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

b. Déterminer la solution particulière f de cette équation différentielle vérifiant $f(0) = 1$.

2. Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x par $g(x) = 3\mathrm{e}^{x} + 2x - 4$.
Vérifier que g est solution de l'équation différentielle $y' - y = 6 - 2x$.

II. Deuxième partie : étude de la fonction $\boldsymbol{h = f - g}$

On considère la fonction h définie pour tout nombre réel x par

$$h(x) = \mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x} - 2x + 4,$$

et on appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Vérifier que $h(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 3 - 2\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} + \dfrac{4}{\mathrm{e}^{x}}\right)$ pour tout réel x et en déduire la limite de h en $+\infty$

2. Étude en $-\infty$.

a. Déterminer la limite de h en $-\infty$.

b. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -2x + 4$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

c. On pose pour tout réel x, $d(x) = h(x) + 2x - 4$;

- Vérifier que $d(x) = \mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x} - 3)$.
- Étudier le signe de $d(x)$ pour tout nombre réel x.
- En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

3. Étude de la dérivée de h.

a. Calculer $h'(x)$ pour tout réel x et vérifier que $h'(x) = (\mathrm{e}^{x} - 2)(2\mathrm{e}^{x} + 1)$.

b. Étudier le signe de $h'(x)$ pour tout nombre réel x, en déduire les variations de h et dresser son tableau de variations ; on donnera la valeur exacte du minimum de h.

4. Tracer la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-4~;~1,5]$.

III. Troisième partie : calcul d'une aire

On considère le domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 3$.

1. Hachurer le domaine sur le graphique précédent.

2. Calculer en cm^2 la valeur exacte de l'aire du domaine J.

Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat STI Génie Mécanique Métropole ∾ septembre 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Une feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit $P(z) = z^3 - 8z - 32$, où z est un nombre complexe.

1. **a.** Calculer $P(4)$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 8 = 0$.
   c. Déterminer les réels a, b, c tels que : $P(z) = (z-4)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   d. Déduire des questions précédentes la résolution de l'équation $P(z) = 0$.
2. Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 4 \quad ; \quad z_{\text{B}} = -2+2\text{i} \quad ; \quad z_{\text{C}} = -2-2\text{i}.$$

   a. Faire une figure, sur la copie, représentant les points A, B, C dans le repère.
   b. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_{B} et z_{C}.
   c. Déterminer, en justifiant, la nature du triangle OBC.
3. Soit Ω le point d'affixe $z_{\Omega} = \dfrac{2}{3}$.
   a. Déterminer les modules des nombres complexes $z_{\text{A}} - z_{\Omega}$, $z_{\text{B}} - z_{\Omega}$, $z_{\text{C}} - z_{\Omega}$.
   b. Que représente Ω pour le triangle ABC ?

EXERCICE 2 **4 points**

Dans un atelier de réparation un technicien s'occupe des ordinateurs en panne qui lui arrivent. Les composants à l'origine de la panne peuvent uniquement être : l'alimentation, la carte graphique ou le processeur.
Une panne simultanée de deux ou trois composants est possible.
Le technicien chargé de la détection des pannes établit le diagnostic d'un ordinateur à l'aide d'un triplet utilisant les initiales des composants, surmontées d'une barre en cas de panne.
Par exemple : $(\text{A}~;\text{CG}~;\overline{\text{P}})$ signifie que l'alimentation et la carte graphique fonctionnent et que la panne provient du processeur.

1. Établir la liste des sept diagnostics possibles sur un ordinateur en panne.
2. On suppose que les sept diagnostics ont la même probabilité d'être établis. Quelle est la probabilité pour qu'un seul des composants soit en panne ?
3. Le tableau suivant donne le coût des composants à remplacer :

Composant	Alimentation	Carte graphique	Processeur
Prix en €	80	160	80

Le coût d'une réparation est celui du remplacement des pièces auquel il faut ajouter un forfait de main-d'oeuvre de 25 € indépendant du nombre de composants à remplacer.

4. **a.** Soit X la variable aléatoire qui à chaque ordinateur en panne associe le coût de la réparation. Donner la liste des valeurs possibles de X.
   b. Donner dans un tableau la loi de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance mathématique de X. Arrondir le résultat à l'unité.
   d. Quel devrait être le coût du forfait de la main-d'œuvre, arrondi à l'unité, pour que le prix moyen d'une réparation soit de 200 € ?

PROBLÈME **11 points**

Ce problème a pour but de montrer un exemple de courbes représentatives de deux fonctions qui sont asymptotes, puis de calculer une aire comprise entre deux courbes.

Partie A : Détermination d'une fonction

On considère la courbe représentative $\mathscr{C}$, d'une fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$, dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1,5 cm en ordonnée.
Cette courbe est représentée sur le document fourni en annexe.
Les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses ont pour coordonnées respectives (1 ; 0) et (3 ; 0).

1. Soient a et b deux nombres réels tels que, pour tout réel $x \in]0~;~+\infty[$,
   $g(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x}$.
   En utilisant les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses, déterminer les nombres a et b.
2. Montrer que $g(x)$ peut s'écrire : $g(x) = x - 4 + \dfrac{3}{x}$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction h définie sur $]0~;~+\infty[$ par : $h(x) = x^2 + 1 - 2\ln x$.

1. Étudier les variations de h et dresser son tableau de variations.
2. Calculer $h(1)$. En déduire que $h(x)$ est strictement positif pour tout nombre réel x de $]0~;~+\infty[$.

Partie C : Étude de fonction

On définit la fonction f par :

$$f(x) = x - 4 + \frac{1 + 2\ln x}{x}$$

sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$. On appellera Γ la courbe représentative de f dans le repère orthogonal du document 1.

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers zéro. En déduire que Γ admet une asymptote que l'on précisera.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Pour tout x de $]0~;~+\infty[$ montrer que $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variations de f.
4. Courbes asymptotes. On rappelle que $g(x) = x - 4 + \dfrac{3}{x}$.
   a. Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x) - g(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b. Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point d'intersection des courbes Γ et $\mathscr{C}$.

c. Sur $]0~;~+\infty[$ déterminer la position de la courbe Γ par rapport à la courbe $\mathscr{C}$.

5. Construire la courbe Γ sur le document fourni en annexe et que l'on rendra avec la copie.

Partie D : Calcul d'une aire comprise entre deux courbes

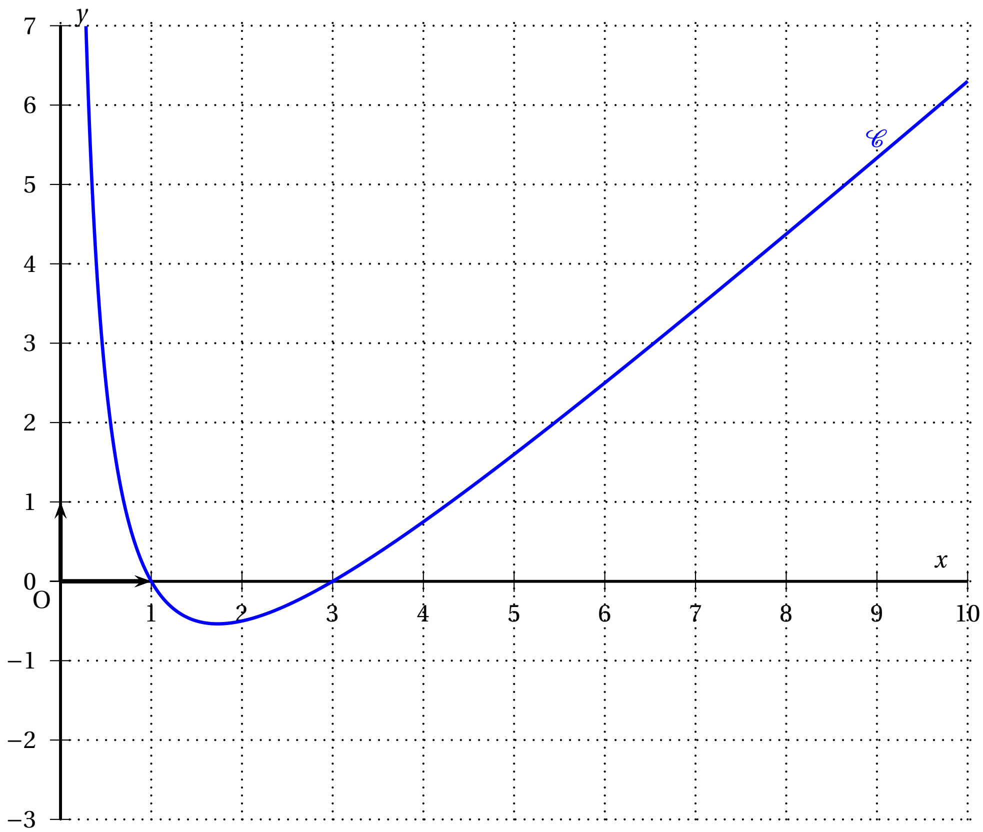
1. Montrer que $f(x) - g(x)$ admet pour primitive sur $]0~;~+\infty[$ la fonction K définie par :

$$K(x) = (\ln x - 1)^2.$$

2. Sur le document fourni en annexe, hachurer l'aire comprise entre les deux courbes et les droites d'équations $x = \text{e}$ et $x = \text{e}^2$.

3. Calculer la valeur de cette aire en cm^2.

Document à rendre avec la copie



∽ Baccalauréat STI – Nouvelle–Calédonie novembre 2004 ∾
Génie mécanique, civil, énergétique

EXERCICE 1 **5 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.
On appelle a, b, c les nombres complexes suivants

$$a = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}, \quad b = \sqrt{2} + \text{i}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad c = ab.$$

1. Écrire b et c sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ où r est un nombre réel positif et θ un nombre réel.
2. Donner la forme algébrique des nombres complexes a et c.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos \dfrac{7\pi}{12}$ et de $\sin \dfrac{7\pi}{12}$.
4. On considère les points B d'affixe b et C d'affixe c.
   Placer les points B et C dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ et montrer que le triangle OBC est équilatéral.
5. On appelle D le point d'affixe $d = b + c$. Placer le point D sur la figure et montrer que le quadrilatère OBDC est un losange.

EXERCICE 2 **4 points**

I. Première partie

Une entreprise fabrique des appareils susceptibles de présenter deux types de pannes « a » ou « b ».
On admettra que 5 % des appareils sont concernés par la panne « a », 3 % par la panne « b » et 1 % par les deux pannes.
On prélève au hasard un appareil dans la production. On note A l'évènement : l'appareil présente la panne « a » et B l'évènement : l'appareil présente la panne « b ».

1. Montrer que la probabilité pour cet appareil de présenter la panne « a » ou la panne « b » est $0,07$.
2. Quelle est la probabilité pour cet appareil de présenter la panne « a » et pas la panne « b » ?
3. Quelle est la probabilité pour cet appareil de ne présenter aucune des deux pannes ?

II. Deuxième partie

L'entreprise fabrique un grand nombre d'appareils par semaine. Chaque appareil a un coût de fabrication de 200 €. La réparation d'une panne « a » coûte 60 € à l'entreprise, la réparation d'une panne « b » coûte 40 € et la réparation des deux pannes coûte 100 €.
On considère la variable aléatoire X qui, à chaque appareil, associe son prix de revient total (coût de fabrication et coût de la réparation éventuelle).

1. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
3. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
4. Que représente $\text{E}(X)$ pour l'entreprise ?

PROBLÈME **11 points**

I. Première partie

Le but de cette partie est de trouver des solutions de l'équation différentielle (L) :

$$y' - 2y = -2x - 5$$

où y désigne une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

1. Soit h la fonction définie pour tout nombre réel x par $h(x) = x + 3$. Montrer que h est solution de l'équation (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' - 2y = 0$. On notera g la solution générale de (E_0).
3. Recherche d'une solution particulière de l'équation (E).
   On considère la fonction φ définie pour tout réel x par $\varphi(x) = g(x) + h(x)$.
   a. Montrer que φ est solution de l'équation différentielle (E).
   b. Déterminer la solution particulière φ_0 de l'équation (E) qui vérifie $\varphi'(0) = 2$.

II. Deuxième partie : étude d'une fonction *f*

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = -\text{e}^{2x} + x + 3.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Étude en $-\infty$.
   a. Étudier la limite de la fonction f en $-\infty$.
   b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 3$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.
   c. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite Δ.
2. étude en $+\infty$.
   a. Justifier que pour tout nombre réel x non nul,
   $$f(x) = \left[\frac{\text{e}^x}{x}\left(\text{e}^{-x}\right) + 1 + \frac{3}{x}\right]x.$$
   b. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. Étude des variations de f
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout nombre réel x.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f. Donner la valeur exacte de son maximum.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
5. Tracer dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ les droites Δ et (T) puis la courbe $(\mathscr{C})$.

III. Troisième partie : calcul d'une aire

Soit a un nombre appartenant à l'intervalle $\left[0\,;\ \dfrac{3}{2}\right]$.

1. Déterminer en unité d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.
2. Déterminer a pour que $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie électronique Métropole juin 2004

EXERCICE 1 **5 points**

Le nombre i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans, l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 4z\sqrt{2} + 16 = 0.$$

2. **a.** On considère les nombres complexes

$$z_A = 4\text{i} \qquad ; \qquad z_B = 2\sqrt{2}(1 - \text{i}) \qquad ; \qquad z_C = 2\sqrt{2}(1 + \text{i}).$$

Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres.

b. Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

Placer dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

3. À tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe z' par la formule

$$z' = \text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}} \times z.$$

On définit la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

a. Quelle est cette transformation ? Donner ses éléments caractéristiques.

b. Montrer que $z'_B = z_A$. Que peut-on en déduire pour les points A et B ?

c. Calculer z'_A sous forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ (avec $r > 0$), puis placer, dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ le point D d'affixe $z_D = z'_A$.

d. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 **4 points**

Un organisme de voyages prépare en Logoland un circuit de découverte qui doit passer une et une seule fois dans chacune des quatre villes notées respectivement I, L, O et Z.

Pour établir l'ordre des visites des villes, l'organisme doit tenir compte de deux impératifs

- Le circuit ne peut partir que de I, L ou Z car la ville O ne possède pas d'aéroport international.
- La fin du voyage devant être en bord de mer, le circuit doit se terminer par I ou Z.

Un circuit possible est I, L, O et Z. Il sera noté (I, L, O, Z) .

Un exemple de circuit impossible est I, O, Z, L. Il est noté (I, O, Z, L).

1. Expliquer pourquoi ce dernier circuit est impossible.

2. Déterminer les huit circuits possibles.

3. On choisit un circuit au hasard (chaque circuit a la même probabilité d'être choisi).

a. Quelle est la probabilité pour que le circuit se termine à I ?

b. Quelle est la probabilité pour que le circuit commence à L ?

4. L'agence de voyages s'intéresse au nombre de kilomètres parcourus en bus entre la ville de départ et la ville d'arrivée pour chaque circuit. Les distances exprimées en kilomètres entre les quatre villes sont indiquées dans le tableau suivant :

	L	I	Z	0
L	0	500	600	300
I	500	0	500	700
Z	600	500	0	600
O	300	700	600	0

Par exemple, on peut lire que la distance entre O et I est de 700 km.

On note X la variable aléatoire qui à chaque circuit associe le nombre de kilomètres parcourus.

a. En s'aidant du tableau fourni, déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

PROBLÈME — 11 points

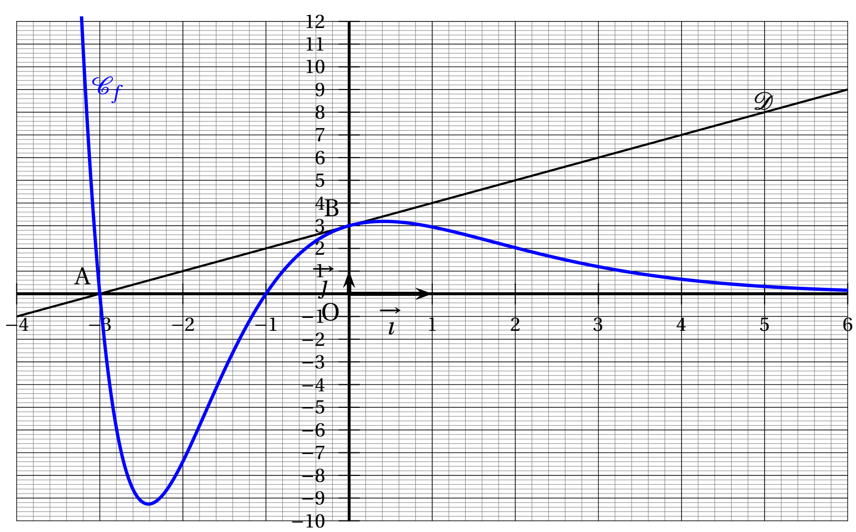
Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^{-x}$$

où $a,\ b$ et c désignent trois nombres réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.



On admet que la droite $\mathscr{D}$ passe par A et est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.

1. a. À l'aide d'une lecture graphique, déterminer les coordonnées entiéres des points A et B. En déduire $f(-3)$ et $f(0)$.

b. Montrer qu'une équation de la droite (AB) est : $y = x + 3$. En déduire la valeur de $f'(0)$.

2. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,
$f'(x) = \left[-ax^2 + (2a - b)x + b - c\right] \text{e}^{-x}$.
   b. En déduire $f'(0)$, en fonction de b et c.
3. **a.** En utilisant les questions précédentes, montrer que les réels a, b et c sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 9a - 3b + c & = & 0 \\ b - c & = & 1 \\ c & = & 3 \end{array}\right.$$

   b. Résoudre le système et en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie B

On suppose que f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 + 4x + 3\right) \text{e}^{-x}.$$

1. **a.** Vérifier que pour x différent de zéro, $f(x) = \left(1 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right) x^2 \text{e}^{-x}$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. En déduire une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   c. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. **a.** Vérifier que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ $f'(x) = (-x^2 - 2x + 1)\text{e}^{-x}$.
   b. Pour tout x réel, étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.
   c. Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'ordonnée de chacun des points de la courbe $\mathscr{C}_f$, où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique α pour x appartenant à $[-1\ ;\ 0]$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie C

1. Soit F La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = (-x^2 - 6x - 9)\text{e}^{-x}.$$

   Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x + 3 - f(x)$.
3. On considère la partie du plan comprise entre la droite $\mathscr{D}$, la courbe $\mathscr{C}_f$, et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 0$.
   On désigne par $\mathscr{A}$ la valeur, exprimée en cm^2, de l'aire de cette partie.
   Calculer $\mathscr{A}$.

∾ Baccalauréat STI Génie électronique Polynésie ∾ juin 2004

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On considère les nombres complexes :

$$z_1 = -2 + 2\text{i}\sqrt{3} \qquad z_2 = 4\text{e}^{\frac{5\text{i}\pi}{6}} \qquad z_3 = 2 - 2\text{i}.$$

1. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_3.
2. Écrire z_2 sous forme algébrique.
3. Placer, dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, les points A, B, C d'affixes respectives $z_1,\ z_2,\ z_3$.
4. **a.** Calculer le module et un argument de $\dfrac{z_2}{z_1}$.
   b. En déduire qu'il existe une rotation de centre O qui transforme A en B. On précisera l'angle de cette rotation.
5. Soit D le point d'affixe $z_4 = z_3\text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{6}}$.
   a. Placer D dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ en expliquant la construction.
   b. Écrire z_4 sous forme algébrique.
   c. Écrire z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
   d. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
   b. Déterminer la solution particulière f de l'équation précédente telle que $f(0) = 1$.
   c. Déterminer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. On considère la suite numérique (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = f(n) = \text{e}^{-n}$.
   a. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{\text{e}}$.
   b. Étudier le sens de variations de la suite (u_n).
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
   d. À partir de quelle valeur de n a-t-on $u_n < 10^{-8}$?
3. **a.** Exprimer, en fonction de n, la somme $S_n = 0 + 1 + 2 + \ldots + n$.
   b. En déduire, en fonction de n, l'expression du produit $P_n = u_0 \cdot u_1 \cdot u_2 \ldots u_n$.

PROBLÈME **10 points**

La feuille fournie en annexe sera rendue avec la copie

Partie A : détermination d'une fonction. Tangente à une courbe

$\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est le repère orthonormal, d'unité graphique 4 cm, donné en annexe.
La courbe $\mathscr{G}$, déjà tracée, représente une fonction g de la variable x définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ où $a,\ b,\ c$ sont des coefficients réels.
$\mathscr{G}$ passe par les points $\text{E}\left(\dfrac{1}{2}\,;\ \dfrac{1}{2}\right)$ $\text{A}(1\,;\,-1)$ et $\text{B}(0\,;\,1)$.

1. **a.** À l'aide des renseignements ci-dessus, écrire un système de trois équations vérifiées par a, b et c.
   b. En déduire que, pour tout nombre réel positif x, $g(x) = -2x^2 + 1$.
2. **a.** La courbe $\mathcal{G}$ coupe l'axe des abscisses au point K. Déterminer la valeur exacte de l'abscisse de K.
   b. Écrire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{G}$ au point K et tracer $\mathcal{T}$ sur le graphique de l'annexe. On indiquera les points utilisés pour tracer $\mathcal{T}$.

Partie B : étude d'une fonction et tracé d'une courbe

Soit la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 1 - 2x^2 + \ln x$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ donné en annexe.

1. **a.** Déterminer la limite en 0 de la fonction f. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
   b. En remarquant que $f(x)$ peut aussi s'écrire sous la forme
   $f(x) = 1 + x\left(-2x + \dfrac{\ln x}{x}\right)$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. **a.** Déterminer la dérivée de f.
   b. Étudier le signe de cette dérivée sur $]0\ ;\ +\infty[$. Justifier.
   c. En déduire le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. **a.** Calculer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathcal{G}$.
   b. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathcal{G}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur le graphique après avoir complété le tableau de valeurs de f donné en annexe.

Partie C Calcul d'aire

1. Soit $\mathscr{E}$ la partie du plan limitée par $\mathcal{G}$, $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$ et $x = 1$.
   Hachurer $\mathscr{E}$.
2. Soit H la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $H(x) = x - x\ln x$. Déterminer la dérivée de H.
3. **a.** Déterminer, en explicitant le calcul, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{E}$ en unités d'aire.
   b. Écrire l'arrondi au centième de l'aire $\mathscr{A}$ exprimée en cm^2.

Cette feuille annexe est à rendre avec la copie
Annexes du problème

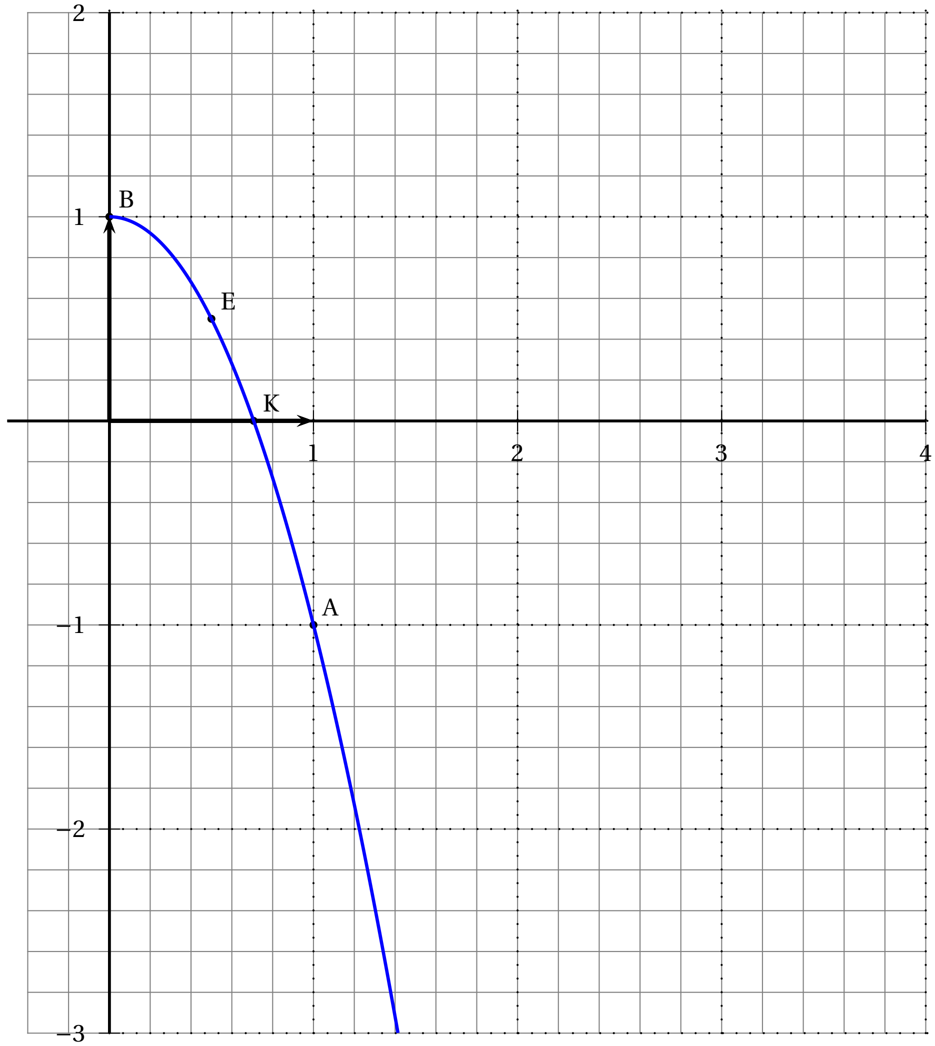


Tableau de valeurs de f

x	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
$f(x)$							

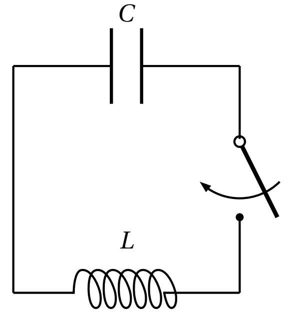
Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie électronique Métropole ∾ septembre 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Une feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **4 points**

On considère le circuit électronique ci-contre comprenant un condensateur dont la capacité, exprimée en farads, a pour valeur C, une bobine dont l'inductance, exprimée en henrys, a pour valeur L et un interrupteur. Le temps test exprimé en secondes.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit.
On appelle $q(t)$ la valeur de la charge, exprimée en coulombs, du condensateur à l'instant t.



On définit ainsi une fonction q, deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
On admet que la fonction q est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + \frac{1}{LC}y = 0.$$

où y est définie et deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et de dérivée seconde y''.
Dans tout l'exercice, on prend $C = 2 \times 10^{-3}$ et $L = 1,25 \times 10^{-2}$.

1. Prouver qu'alors l'équation différentielle (E) s'écrit :

$$y'' + 4 \times 10^4 y = 0.$$

2. Résoudre l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la fonction q sachant qu'elle est la solution particulière de (E) vérifiant :

$$q(0) = \frac{\sqrt{2}}{400} \quad \text{et} \quad q'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Montrer que pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $q(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$q(t) = \frac{1}{200} \times \sin\left(200t + \frac{\pi}{4}\right).$$

5. Calculer la valeur moyenne q_m de la fonction q sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{800}\right]$.
   On donnera une valeur exacte.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans le hall d'accueil d'une gare téléphérique, trois appareils automatiques, (numérotés 1, 2 et 3) délivrent des tickets identiques d'une valeur de 20 €.
Deux personnes, que l'on désigne par les lettres M et N, se présentent dans cet ordre, chacune devant un appareil (éventuellement le même) choisi aléatoirement pour acheter un ticket.
On convient de noter $(a,\ b)$ l'évènement élémentaire suivant : la personne M choisit l'appareil a et la personne N choisit l'appareil b.

1. Expliciter les neuf évènements élémentaires. On pourra s'aider d'un arbre ou d'un tableau.
2. On suppose que les neuf évènements élémentaires sont équiprobables.
   a. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   A : « seul l'appareil 2 a été utilisé » ;
   B : « un seul des trois appareils a été utilisé » ;
   C : « l'appareil 2 n'a pas été utilisé ».
   b. Les évènements A et C sont-ils contraires ? Justifier.
3. L'appareil 1 est déréglé, il réclame seulement 10 € pour le paiement d'un ticket d'une valeur de 20 €. Les clients l'ignorent jusqu'au paiement de leur ticket.
   On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque évènement élémentaire, associe la somme totale, exprimée en euros, payée par les deux personnes.
   a. Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b. Calculer la probabilité : $P(X = 20)$.
   c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   d. Calculer son espérance mathématique $\text{E}(X)$.
   On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au centième près.

PROBLÈME **12 points**

Partie A : Introduction d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \text{e}^{x} + x - 1.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction g puis dresser son tableau de variations (les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ ne sont pas demandées).
2. **a.** Vérifier que $g(0) = 0$.
   b. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 3 - x\text{e}^{-x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Vérifier que, pour tout x réel non nul :

$$f(x) = x\left(1 - \frac{3}{x} - \text{e}^{-x}\right).$$

   En déduire $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
2. **a.** Calculer : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite D d'équation : $y = x - 3$.
   c. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D.
3. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Pour tout nombre réel x, calculer $f'(x)$, puis vérifier que :

$$f'(x) = g(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

b. En utilisant les résultats de la **partie A**, déterminer le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. **a.** À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de $f(3)$ et de $f(4)$.

b. Prouver qu'il existe un nombre α, compris entre 3 et 4, tel que : $f(\alpha) = 0$.

c. Donner une valeur approchée de α au centième près.

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite D dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie C : Calcul d'aire

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On note h' la fonction dérivée de la fonction h. Calculer $h'(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

2. On appelle $\mathscr{A}$ la valeur, exprimée en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite D, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.
Donner la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis une valeur décimale approchée par excès à 10^{-2} près.

Baccalauréat STI – Nouvelle – Calédonie novembre 2004
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

1. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, résoudre l'équation d'inconnue z :

$$2z^2 + 10z + 25 = 0.$$

Écrire les solutions de cette équation sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ où r est un nombre réel positif et θ un nombre réel.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, on considère le point A d'affixe $z_{\text{A}} = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{2}\text{i}$, le point B d'affixe $z_{\text{B}} = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2}\text{i}$ et le point C d'affixe $z_{\text{C}} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$.

   a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$.

   b. Calculer le module de $z_{\text{A}} - z_{\text{B}}$ et celui de $z_{\text{B}} - z_{\text{C}}$. En déduire la nature du triangle ABC.

3. On appelle A′ et B′ les images respectives des points A et B par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{12}$ et on note $z_{\text{A}'}$ et $z_{\text{B}'}$ les affixes respectives de A′ et B′.

   a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes $z_{\text{A}'}$ et $z_{\text{B}'}$.

   b. Écrire les nombres complexes $z_{\text{A}'}$ et $z_{\text{B}'}$ sous forme algébrique.

   c. Placer les points A′ et B′ dans le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$. On expliquera la construction géométrique.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + \dfrac{1}{4}y = 0$, y désignant une fonction numérique définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

2. Déterminer la fonction f, solution de l'équation précédente, qui vérifie :
$f(0) = 2$ et $f'(0) = \sqrt{3}$.

3. Vérifier, que pour tout nombre réel x, $f(x) = 4\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

4. **a.** En utilisant l'équation différentielle (E), expliquer comment on peut obtenir la représentation graphique de f'', dérivée seconde de f, à partir de celle de f.

   b. Sur la feuille annexe est tracée la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0~;~4\pi]$. Tracer la représentation de f'' sur ce même graphique et sur ce même intervalle.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x + 1 - \text{e}^x.$$

1. Déterminer la dérivée h' de h.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $1 - \text{e}^x = 0$ et l'inéquation $1 - \text{e}^x > 0$. En déduire le sens de variation de la fonction h.

3. Calculer $h(0)$. Dresser le tableau de variations de h (on ne calculera pas les limites aux bornes de l'ensemble de définition).

4. Justifier que, pour tout nombre réel x, $h(x) \leqslant 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(-2x^2 - x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. En remarquant que, pour tout nombre réel x différent de 0, on a

$$f(x) = \left(-2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)x^2\mathrm{e}^{-x},$$

déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. a. Soit f' la dérivée de f. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \left(2x^2 - 3x - 2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous. On donnera les valeurs arrondies au centième.

x	$-1,3$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	2	3	4	6
$f(x)$										

5. On appelle A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0 et $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

a. Donner une équation de $\mathscr{T}$; on l'écrira sous la forme $y = g(x)$ où g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) - g(x) = (1-2x)h(x)\mathrm{e}^{-x}$, h étant la fonction étudiée dans le **partie A**.

c. Étudier suivant les valeurs du nombre réel x, le signe de $f(x) - g(x)$. En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{T}$.

6. Tracer $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$.

7. a. Déterminer des nombres réels a, b et c pour que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de la fonction f.

b. Calculer, en cm^3, la valeur exacte de l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie des matériaux Métropolee juin 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 6z + 12 = 0.$$

   b. Écrire les solutions de cette équation sous forme exponentielle.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, placer les points A, B et I d'affixes respectives

$$z_\text{A} = 3 + \text{i}\sqrt{3} \qquad z_\text{B} = 3 - \text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_\text{I} = 2.$$

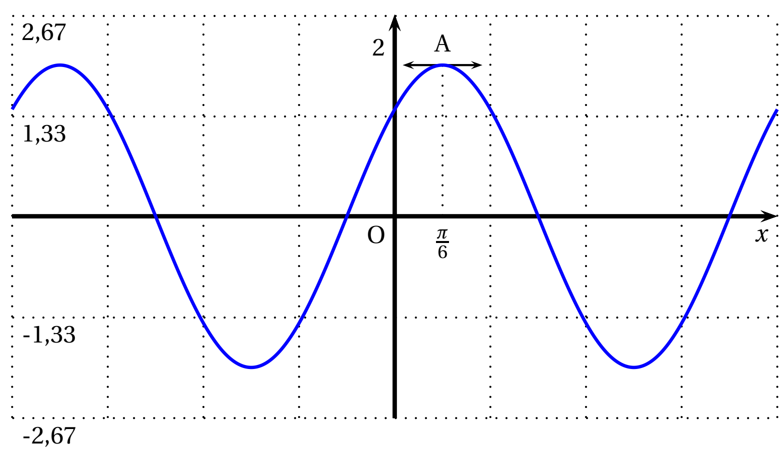
   a. Montrer que les points A, B et O sont sur un cercle de centre I dont on précisera le rayon.

   b. Donner, en le justifiant, la nature du triangle OAB.

   c. Placer le point C d'affixe $z_\text{C} = -2\text{i}\sqrt{3}$. Montrer que les points A, C et I sont alignés.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $4y'' + 9y = 0$.
2. On désigne par f la solution particulière de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



   Il est précisé que la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{\pi}{6} ; 2\right)$. Déterminer une expression de $f(x)$.

3. Montrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} f(x)\,\mathrm{d}x$. Interpréter graphiquement le résultat.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = 2 + (2-x)\mathrm{e}^{2x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées)

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on pourra poser $X = 2x$).
   b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
   c. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Δ.
3. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (3-2x)\mathrm{e}^{2x}$, où f' désigne la fonction dérivée de f.
   b. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$.
4. **a.** Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   b. Tracer Δ, $\mathscr{T}$ puis $\mathscr{C}$.
5. Soit G la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par

$$G(x) = -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + \frac{5}{4}\mathrm{e}^{2x}.$$

   Montrer que G est une primitive de la fonction g définie pour tout nombre réel x par $g(x) = (2-x)\mathrm{e}^{2x}$.
6. **a.** Hachurer la partie $\mathscr{A}$ du plan limitée par $\mathscr{C}$, la droite d'équation $y = 2$ et l'axe des ordonnées.
   b. Calculer l'aire de $\mathscr{A}$. En donner la valeur exacte en unités d'aire.
   Donner une valeur arrondie de cette aire, en cm^2, à 10^{-2} près.

Baccalauréat STI Métropole septembre 2004
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **6 points**

La question **4.** est indépendante des questions **1., 2.** et **3.**.

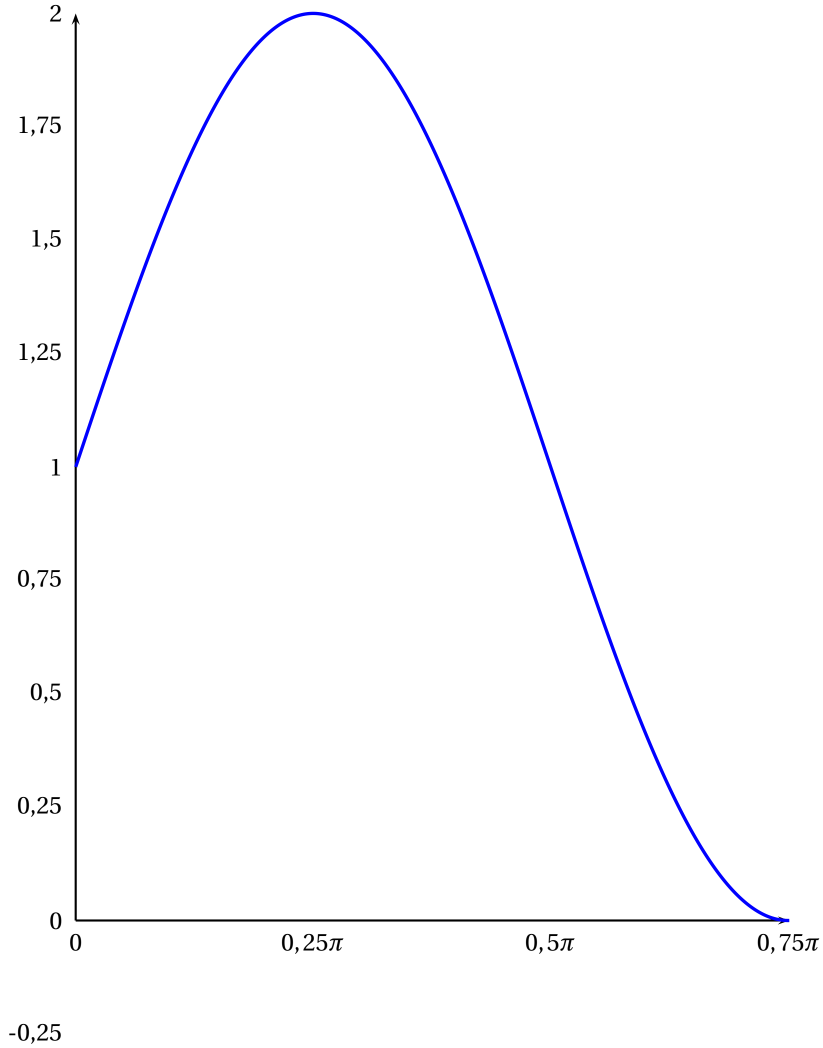
1. Soit ρ_n le terme général d'une suite géométrique de premier terme $\rho_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$.
   Déterminer ρ_n en fonction de n.
2. Soit θ_n le terme général d'une suite arithmétique de premier terme $\theta_0 = \pi$ et de raison $-\frac{\pi}{3}$.
   Déterminer θ_n en fonction de n.
3. Soit z_n le nombre complexe de module ρ_n et d'argument θ_n.
   a. Donner une forme trigonométrique de z_n en fonction de n.
   b. Déterminer la forme algébrique de z_0, z_1, z_2 et z_3.
4. Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$, (unité graphique : 2 cm) on donne les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -4, \quad z_{\text{B}} = -1 + \text{i}\sqrt{3}, \quad z_{\text{C}} = \frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_{\text{D}} = \frac{1}{2}.$$

   a. Placer les point A, B, C et D dans le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$.
   b. Soit B′ le projeté orthogonal de B sur l'axe des réels.
   Donner l'affixe de B′ et placer B′ dans le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$.
   c. Calculer la valeur exacte en cm^2 de l'aire du triangle ABB′.
   d. Calculer la valeur exacte en cm^2 de l'aire du trapèze B′BCD.
   e. En déduire la valeur exacte en cm^2 de l'aire du quadrilatère ABCD.
   Donner la valeur arrondie au mm^2 près de cette aire.

T. S. V. P.

EXERCICE 2 **4 points**



Soit f la fonction numérique définie pour tout x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{3\pi}{4}\right]$ par :

$$f(x) = 1 + \sin 2x.$$

La représentation graphique Γ de la fonction f est donnée ci-dessus dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$(unité graphique 4 cm).

1. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de f.

   b. Démontrer que la courbe Γ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses aux points d'abscisses $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.

2. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sin^2(2x) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 4x)$.

3. On appelle V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe Γ autour de l'axe des abscisses.

   On admet que la valeur de V, en unités de volume, est donnée par :

$$V = \pi \int_0^{\frac{3\pi}{4}} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

   Donner la valeur exacte de V en cm^3, puis sa valeur décimale arrondie au mm^3 près.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Soit g la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, par :

$$g(x) = 1 - x\ln x.$$

1. Déterminer la limite de g en 0.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. Déterminer la fonction dérivée g' de g et étudier son signe sur $]0~;~+\infty[$.
4. établir le tableau de variations de g sur $]0~;~+\infty[$, en précisant la valeur exacte de l'extremum de g.
5. **a.** Justifier que l'équation $g(x) = 0$ a une solution α et une seule sur l'intervalle $[1~;~\mathrm{e}]$.

   b. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

   c. En déduire, en fonction du nombre x de $]0~;~+\infty[$, le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de $]0~;~+\infty[$, par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\mathrm{e}^x}.$$

Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Étude du comportement de f en 0 :

   a. Déterminer la limite de f en 0.

   b. En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation.
2. Étude du comportement de f en $+\infty$:

   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. On pourra écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$.

   b. En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation.
3. Étude des variations de f

   a. Déterminer la fonction dérivée f' de f. Montrer que pour tout x de $]0~;~+\infty[$,
   $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x\mathrm{e}^x}$.

   b. Établir le tableau de variations de f sur $]0~;~+\infty[$ en fonction de α.
   En prenant 1,76 comme valeur approchée de α, donner une valeur approchée de $f(\alpha)$.

   c. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
4. Dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, tracer $\mathscr{T}$, les asymptotes à $\mathscr{C}$, puis la courbe $\mathscr{C}$.