# ↫ Baccalauréat STI 2005 ↬
# L'intégrale de juin à novembre 2005

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

# ∾ Baccalauréat STI Arts appliqués– Métropole juin 2005 ∾

**EXERCICE 1**

Lors d'un concours de karaoké, le public, composé de 450 jeunes, dont 150 garçons, a voté pour l'un des trois finalistes, Hatxi, Élodie et Machyl.
Les voix sont réparties de la façon suivante :
- 45 garçons ont voté pour Hatxi ;
- 35 % des filles ont voté pour Élodie.
- Parmi les 165 jeunes qui ont voté pour Machyl, il y a 20 % de garçons.

1. Reproduire puis compléter le tableau suivant :

| | Hatxi | Élodie | Machyl | Total |
|---|---|---|---|---|
| Garçons | | | | |
| Filles | | | | |
| Total | | | | |

2. On choisit au hasard un jeune du public. On suppose que tous les choix sont équiprobables et on considère les évènements suivants :
$A$ : « le jeune choisi est un garçon » ;
$B$ : « le jeune choisi a voté pour Machyl ».
Les résultats demandés seront donnés sous forme décimale arrondie au centième.

   a. Calculer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$.
   b. Définir par une phrase les évènements suivants : $A \cap B$ et $A \cup B$.
   c. Calculer $P(A \cap B)$, en déduire $P(A \cup B)$.

**EXERCICE 2**

Un club sportif confie l'élaboration d'un logo à une agence. Celle-ci choisit un « drapeau » pour motif.

**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ par

$$f(x) = x^3 - x + 2.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 5 cm. On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans ce repère.

1. $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$ ; calculer $f'(x)$.
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[-1 ; 1]$ sachant que $f'(x) = 3\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et dresser le tableau de variations de $f$ sur cet intervalle.
On indiquera pour $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ des valeurs approchées décimales arrondies au centième.
3. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :
(on donnera des valeurs approchées décimales arrondies au centième).

| $x$ | $-1$ | $-0,8$ | $-0,6$ | $-0,4$ | $-0,2$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | 2,38 | | | | | 1,66 | | | |

4. Tracer $\mathscr{C}_f$ sur la feuille de papier millimétré.
5. Calculer l'intégrale I= $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

**Partie B**

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ par

$$g(x) = (x-1)\mathrm{e}^{x} + 2.$$

On appelle $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de $g$ dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $[-1 ; 1]$, $g'(x) = x\mathrm{e}^{x}$ où $g'$ désigne la fonction dérivée de $g$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $[-1 ; 1]$ et dresser le tableau de variations de $g$.
3. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera des valeurs approchées décimales arrondies au centième).

| $x$ | $-1$ | $-0,8$ | $-0,4$ | 0 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | 1,19 | | | | 1,27 | | |

4. Tracer $\mathscr{C}_g$ dans le même repère $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ que précédemment.
5. On considère la fonction $G$ définie sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ par

$$G(x) = (x-2)\mathrm{e}^{x} + 2x.$$

   **a.** Montrer que $G$ est une primitive de $g$ sur $[-1 ; 1]$.

   **b.** Calculer l'intégrale J = $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$.

**Partie C**

La partie du plan $\mathscr{A}$ limitée par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et par la droite d'équation $x = -1$ représente la toile du drapeau.

1. Placer les points P$(-1 ; 2)$ et Q$(-1 ; 0)$ puis tracer le segment [PQ] pour achever le motif.
2. On suppose que, pour tout $x$ de l'intervalle $[-1 ; 1]$, $f(x) \geqslant g(x)$ et que l'aire de la partie $\mathscr{A}$ du plan est donnée, en unités d'aires, par A = $\displaystyle\int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

   **a.** Calculer la valeur exacte de A.

   **b.** En déduire une valeur approchée à $10^{-2}$ près de l'aire de $\mathscr{A}$ exprimée en cm$^2$.

**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat STI Génie mécanique, énergétique, civil ∾ La Réunion juin 2005

**EXERCICE 1** **4 points**

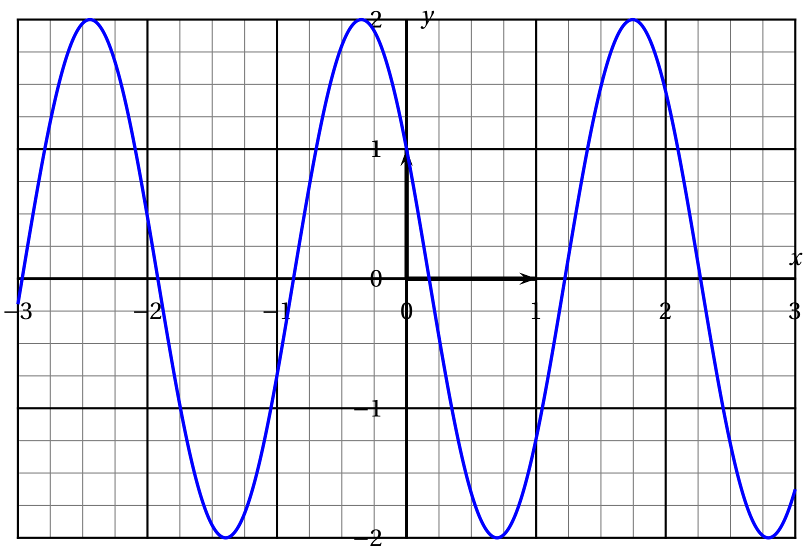
Une urne contient six billets numérotés de 1 à 6.
On tire au hasard deux billets successivement et sans remise. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Chaque tirage peut être modélisé par un couple $(a\,;\,b)$ de deux nombres distincts. Par exemple le tirage du billet numéroté 3 suivi du billet numéroté 5 sera noté $(3\,;\,5)$.
   - **a.** Justifier qu'il y a 30 couples possibles.
   - **b.** Soit A l'évènement : « les deux numéros tirés sont pairs ».
     Vérifier que la probabilité de A est égale à $\dfrac{1}{5}$.
   - **c.** Calculer la probabilité de l'évènement B : « au moins l'un des numéros est impair ».
2. Soit $D$ la variable aléatoire, qui à chaque tirage associe la différence entre le plus grand et le plus petit des deux nombres du couple. Ainsi au couple $(3\,;\,5)$ comme au couple $(5\,;\,3)$ la variable aléatoire $D$ associe le réel $5 - 3 = 2$.
   - **a.** Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire $D$ ?
   - **b.** Calculer les probabilités $P(D = 1)$ et $P(D = 3)$.
   - **c.** Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $D$.
   - **d.** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $D$.

**EXERCICE 2** **4 points**

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 9y = 0$, où $y$ est une fonction de la variable $x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. La courbe $\mathscr{C}$, donnée ci-dessous, représente une solution particulière notée $f$ de l'équation différentielle (E). La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $A(0\,;\,1)$ et le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$ est égal à $-3\sqrt{3}$.
   - **a.** En déduire les valeurs exactes de $f(0)$ et de $f'(0)$.
   - **b.** Déterminer cette solution particulière $f$.
   - **c.** Vérifier que, pour tout réel $x$, $f(x) = 2\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.
3. **a.** Montrer que $\dfrac{7\pi}{18}$ et $\dfrac{13\pi}{18}$ sont deux solutions de l'équation, d'inconnue $x$, $f(x) = 0$.
   Déterminer deux autres solutions de cette équation.
   - **b.** Calculer la valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{7\pi}{18}\,;\,\dfrac{13\pi}{18}\right]$.




**Problème** **12 points**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 4 - \mathrm{e}^{-x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant $f$ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

**Partie A : étude d'une fonction**

1. **a.** Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.
   **b.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote $\Delta$ à la courbe $\mathscr{C}$ et donner son équation.
2. **a.** Déterminer la dérivée $f'$ de la fonction $f$ et justifier son signe sur $\mathbb{R}$.
   **b.** Donner le tableau de variations de $f$.
3. **a.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue $x$, $f(x) = 0$.
   **b.** Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\Delta$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ défini ci-dessus.

**Partie B : Résolution d'une équation**

Soit (E) l'équation d'inconnue réelle $x$ : $f(x) = 2x + 3$.

1. Vérifier que $x = 0$ est une solution de (E).
2. **a.** Tracer la droite $D$ d'équation $y = 2x + 3$ sur le même graphique que la courbe $\mathscr{C}$.
   **b.** Justifier graphiquement l'existence d'une deuxième solution notée $\alpha$ de l'équation (E). Placer $\alpha$ sur l'axe des abscisses.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude $10^{-3}$ de $\alpha$.

**Partie C : Calcul d'une aire**

1. Hachurer le domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire en cm$^2$ de ce domaine plan.
2. **a.** Vérifier que $\mathscr{A} = 8\displaystyle\int_{\alpha}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   **b.** Calculer $\mathscr{A}$ en fonction de $\alpha$.

   **c.** En utilisant l'équation (E) de la **partie B**, justifier que $\mathrm{e}^{-\alpha} = 1 - 2\alpha$.
   En déduire que $\mathscr{A} = -16\alpha$.

   **d.** à l'aide du résultat obtenu dans la **partie B**, déterminer une valeur de $\mathscr{A}$ arrondie au dixième.

**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat STI Métropole juin 2005
# Génie mécanique, énergétique, civil

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

**EXERCICE 1** **4 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
Le nombre i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. **a.** Déterminer sous forme algébrique le nombre complexe $z_1$, vérifiant :

$$z_1(1+\text{i})+3+\text{i}=0.$$

**b.** Déterminer sous forme algébrique les nombres complexes $z_2$ et $z_3$ vérifiant le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2z_2+z_3 & = & 5 \\ z_2+3z_3 & = & -10\text{i} \end{array}\right.$$

2. Soient A, B et trois points du plan d'affixes respectives $z_\text{A}=3+2\text{i}$, $z_\text{B}=-1-4\text{i}$ et $z_\text{C}=-2+\text{i}$.
   **a.** Placer ces trois points dans le plan complexe.
   **b.** Calculer, les longueurs AB, BC et CA.
   **c.** En déduire la nature du triangle ABC, puis calculer son aire.

**EXERCICE 2** **5 points**

Le Comité des fêtes d'un village organise une loterie à l'aide de deux urnes.
L'urne $\text{U}_1$ contient trois boules rouges notées $R_1$, $R_2$, $R_3$ et deux boules jaunes notées $J_1$ et $J_2$.
L'urne $\text{U}_2$ contient quatre boules bleues notées $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ et une boule verte $V$.
Pour participer à cette loterie, un joueur doit d'abord miser 3 €. Il tire ensuite au hasard une boule dans $\text{U}_1$, puis une boule dans $\text{U}_2$. Les boules sont indiscernables au toucher. On suppose que tous les tirages de couples de boules sont équiprobables.

1. À l'aide d'un tableau ou d'un arbre montrer qu'il y a 25 couples de boules possibles.
2. Une boule rouge fait gagner 2 €. Une boule jaune fait gagner 3 €. Une boule bleue fait gagner 1 €. La boule verte fait gagner 5 €. À chaque tirage de 2 boules la variable aléatoire X associe le gain finalement réalisé par le joueur. Ainsi, en tenant compté de. la mise de 3 €, le tirage d'une boule rouge et d'une boule verte occasionne finalement un gain de 4 €.
   **a.** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
   **b.** Démontrer que $P(\text{X}=5)=\dfrac{2}{25}$.
   **c.** Présenter en tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   **d.** Quelle est la probabilité que le gain du joueur ne dépasse pas finalement 1 € ?
3. **a.** Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.
   **b.** Le Comité s'aperçoit que son jeu est déficitaire. Expliquer quelle est, en nombre entier d'euros, la mise minimale qu'il faudrait demander afin de rendre le jeu favorable au Comité.

**PROBLÈME** **11 points**

*L'objectif est de déterminer une fonction dont la représentation graphique est donnée sur la page annexe à joindre à la copie, puis d'étudier certaines propriétés de cette fonction.*

**Partie A**

Sur la page annexe, on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm, la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$.
La courbe $\mathcal{C}$ passe par les points de coordonnées A(0; 4) et B(−1,5 ; 1).

1. Donner les valeurs de $f(0)$ et de $f(-1,5)$.
2. On suppose que pour tout nombre réel $x$, $f(x)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$f(x) = (ax+b)\text{e}^{-x} + 1, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

Utiliser les résultats de la question **1.** pour déterminer la valeur des nombres réels $a$ et $b$.

**Partie B**

Dans toute la suite du problème on étudie la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x+3)\text{e}^{-x} + 1.$$

1. Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.
2. **a.** Montrer que pour tout nombre réel $x$ : $f(x) = 2\dfrac{x}{\text{e}^x} + \dfrac{3}{\text{e}^x} + 1$.
   **b.** Déterminer alors la limite de $f$ en $+\infty$.
   En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ a une asymptote (D) dont on donnera une équation.
   **c.** Démontrer que cette asymptote (D) coupe la courbe $\mathcal{C}$ au point B.
   **d.** Étudier, en le justifiant soigneusement, la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite (D).
3. Prouver que la dérivée $f'$ de la fonction $f$ est définie pour tout nombre réel $x$ par :

$$f'(x) = (-2x-1)\text{e}^{-x}.$$

4. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
5. Déterminer une équation de la droite (T) tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.

**Partie C**

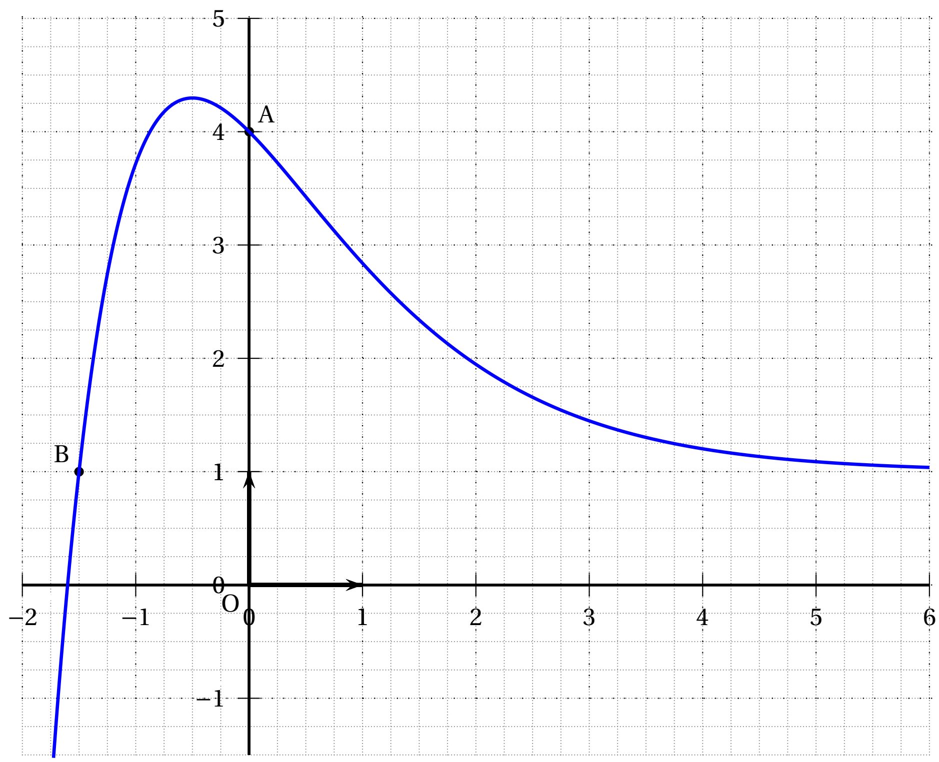
1. On rappelle que, sur la feuille annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.
   Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point E d'abscisse (−0 ; 5).
   Tracer sur la feuille annexe la tangente A.
   Compléter cette figure en représentant l'asymptote (D) et la tangente (T).
   Hachurer la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$.
2. Montrer que la fonction $F$ définie par

$$F(x) = (-2x-5)\text{e}^{-x} + x$$

est une primitive de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

**3.** Soit $\mathscr{A}$ l'aire en cm$^2$ de la partie hachurée précédemment. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis en donner une valeur arrondie au centième.

**Annexe du problème à rendre avec la copie**



**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat STI Polynésie 8 juin 2005
# Génie mécanique, énergétique, civil

**EXERCICE 1** **5 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

**I. Résolution d'une équation**

On considère l'équation (E) d'inconnue $z$ :

$$z^3 - 2z^2 + 25z - 50 = 0.$$

1. Vérifier que 2 est solution de l'équation (E).
2. En déduire que (E) peut s'écrire $(z-2)\left(\alpha z^2 + \beta z + \gamma\right) = 0$ où $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ sont trois nombres réels que l'on déterminera.
3. Résoudre alors l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

**II. étude d'une configuration du plan**

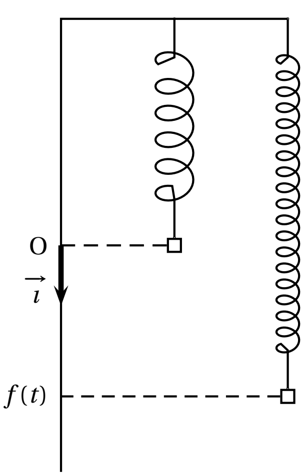
1. Dans un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, unité graphique 1 cm, placer les points A et B d'affixes respectives $a = 2$ et $b = 5\text{i}$.
2. Soit M le milieu du segment [AB]. Placer M dans le repère et déterminer son affixe $m$.
3. Soit P le point d'affixe $p = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.
   Donner l'écriture algébrique de $p$ et placer P dans le repère.
4. Démontrer que le triangle BMP est rectangle et isocèle.

**EXERCICE 2** **5 points**

Un mobile, de masse 1 kg, est attaché à un ressort dont la constante de raideur vaut $k = 9$ N/m.
Si l'on écarte le mobile de sa position d'équilibre O, il effectue des oscillations autour de cette position.

À chaque instant $t$, la position du mobile est repérée par son abscisse $f(t)$ dans le repère $\left(O\,;\ \overrightarrow{\imath}\right)$.
Les lois de la Physique montrent que la fonction $f$ est solution de l'équation différentielle
(E) : $\dfrac{1}{9}y'' + y = 0$.

1. Trouver la solution générale de l'équation différentielle (E).
2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le mobile est au point $f(0) = 0,5$ m et a une vitesse initiale $f'(0) = 1,5$ m/s.
   Montrer que la fonction $f$ est définie par :
   $f(t) = \dfrac{1}{2}(\cos 3t + \sin 3t)$.
3. Vérifier que, pour tout nombre réel $t$ : $f(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(3t - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
4. Résoudre l'équation $f(t) = 0$ dans l'intervalle $[0\,;\pi]$.
5. À partir de l'instant $t = 0$, au bout de combien de temps le mobile repassera-t-il pour la première fois à sa position d'équilibre? (On donnera la réponse arrondie au millième de seconde.)



**PROBLÈME** **10 points**

**Partie A** Préliminaires

On appelle $f$ la fonction définie pour tout nombre réel $x$ par

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$$

où $a$ et $b$ sont deux nombres réels , qu'on se propose de déterminer.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 2 cm.

1. Sachant que $\mathscr{C}$ passe par Ie point A de coordonnées $(0~;~2)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$, déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
2. En déduire que $a = 1$ et que $b = 2$.

**Partie B** Étude de la fonction $f$

1. Étude des limites
   a. Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. En déduire la présence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ et en donner une équation.
2. Étude des variations de $f$
   a. Déterminer la dérivée $f'$ de $f$, puis étudier son signe.
   b. Dresser le tableau de variations de $f$.
3. Étude d'un problème de tangente
   a. Déterminer une équation de la droite $(T)$, tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-2$.
   b. Factoriser l'expression $f(x) - x\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^2$ et en déduire son signe.
   c. En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $(T)$.
4. Tracer dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ les tangentes et asymptote connues puis la courbe $\mathscr{C}$.

**Partie C** Un calcul de volume

Soit $\mathscr{S}$ le solide obtenu par rotation de la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe $\left(\mathrm{O}~\vec{\imath}\right)$, sur l'intervalle $[0~;~3]$.
On se propose de calculer le volume $\mathscr{V}$ du solide $\mathscr{S}$.
On rappelle que $\mathscr{V} = \displaystyle\int_0^3 \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$ en unités de volume.

1. Soient $g$ et $G$ les fonctions définies pour tout nombre réel $x$ par :

$$g(x) = (x+2)^2\mathrm{e}^{-2x} \quad \text{et} \quad G(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{13}{4}\right)\mathrm{e}^{-2x}.$$

   Montrer que $G$ est une primitive de $g$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\mathscr{V}$ en cm$^3$. (On donnera la valeur exacte du résultat puis une valeur arrondie au mm$^3$).

**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat STI Métropole septembre 2005
# Génie mécanique, civil, énergétique

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Une feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

**EXERCICE 1** **4 points**

1. Soit (E) l'équation différentielle

$$y' = -\frac{1}{a}y$$

où $y$ est une fonction de la variable $x$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $a$ une constante réelle non nulle. Résoudre cette équation.

2. Déterminer la solution $p$ de (E) qui vérifie $p(0) = 1$.
3. La pression atmosphérique de l'air (en bar) à l'altitude $x$ (en mètre) au-dessus du niveau de la mer est donnée par

$$p(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}.$$

   **a.** Déterminer la constante $a$ sachant que la pression au sommet de l'Éverest à l'altitude $x = 8\,848$ est de $0,331$ bars.
   On arrondira $a$ à l'entier le plus proche.

   **b.** On prend $a = 8\,003$. On mesure, en un lieu, une pression atmosphérique de $0,548$ bars, Calculer l'altitude du lieu.

**EXERCICE 2** **5 points**

On désigne pat i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = -1 - \mathrm{i}, \qquad z_{\mathrm{B}} = 3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{C}} = 7 - \mathrm{i}.$$

1. **a.** Écrire $z_{\mathrm{B}}$ sous forme algébrique.
   **b.** Placer les points A, B et C dans le plan $\mathscr{P}$.
2. Déterminer les longueurs AB, AC, BC et en déduire la nature du triangle ABC.
3. Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un carré.
4. Soit I le point d'affixe $z_{\mathrm{I}} = 3 - \mathrm{i}$.
   On considère l'ensemble (E) des points $M$ de $\mathscr{P}$ dont l'affixe $z$ vérifie

$$|z - (3 - \mathrm{i})[= 4.$$

   **a.** Les points A, B, C et D appartiennent-ils à (E) ?
   **b.** Quelle est la nature de (E) ?
   **c.** Tracer l'ensemble (E).

**PROBLÈME** **11 points**

**Partie A**

Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = \ln x - \frac{1}{x^2} + 1.$$

1. **a.** Montrer que la dérivée $g'$ de la fonction $g$ est définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g'(x) = \frac{x^2+2}{x^3}.$$

   **b.** Montrer que la fonction $g$ est strictement croissante sur $]0~;~+\infty[$.

2. **a.** Calculer $g(1)$.

   **b.** En déduire que $\left\{\begin{array}{lll} g(x) > 0 & \text{pour} & x > 1\\ g(x) < 0 & \text{pour} & 0 < x < 1.\end{array}\right.$

**Partie B**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln x + \frac{1}{x}.$$

On appelle $\Gamma$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** On admet que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ ; déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers 0 ; en déduire que $\Gamma$ admet une asymptote verticale que l'on précisera.

   **b.** Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

2. **a.** Montrer que la fonction dérivée $f'$ de la fonction $f$ est définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f'(x) = g(x).$$

   **b.** À partir des résultats de la **partie A** dresser le tableau de variations de $f$.

3. Tracer la courbe $\Gamma$.

**Partie C**

Soit $H$ la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$H(x) = \frac{x^2}{2}\ln x + \ln x - \frac{x^2}{4}.$$

1. Comparer $H'(x)$ et $f(x)$. En déduire une primitive de la fonction $f$ sur $]0~;~+\infty[$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x = \frac{\text{e}^2+5}{4}$.
3. Calculer l'aire exprimée en cm$^2$ de la partie du plan délimitée par la courbe $\Gamma$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $=$ e.
   On donnera la valeur exacte, puis approchée à 1 mm$^2$ près par excès.

**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat STI novembre 2005 Nouvelle-Calédonie ∾ Génie Mécanique - Génie énergétique - Génie Civil

*Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet. Une feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.*

**EXERCICE 1** **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, unité graphique 2 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

**1.** Résolution d'une équation.

**a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$$

**b.** Calculer le module et un argument de chacune des solutions.

Soient $A$ et $M$ les points d'affixes respectives $a = \sqrt{3} + \text{i}$ et $m = \sqrt{3} - \text{i}$.

**2.** Mise en place d'une configuration géométrique.

**a.** Placer $A$ et $M$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, en indiquant une méthode de construction.

**b.** On appelle $B$ et $C$ les points d'affixes respectives $b = \text{i}a$ et $c = \text{i}b$.

Calculer $b$ et $c$ sous forme algébrique, puis placer $B$ et $C$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

**c.** Démontrer que le triangle $ABC$ est rectangle et isocèle.

**d.** Déterminer l'affixe du point $D$ tel que $ABCD$ soit un carré. Placer $D$ sur la figure.

**3.** Soient $N$ et $P$ les points d'affixes respectives $n = \text{e}^{\frac{2\text{i}\pi}{3}}m$ et $p = \text{e}^{\frac{2\text{i}\pi}{3}}n$

**a.** Déterminer la forme algébrique de $n$, puis démontrer que $P = C$.

**b.** Démontrer que le triangle $MNP$ est équilatéral.

**4.** Calculer en cm$^2$ l'aire du carré $ABCD$, puis l'aire du triangle $MNP$. On donnera les valeurs exactes puis les valeurs approchées à l'unité.

**EXERCICE 2** **4 points**

Un sac contient des boules indiscernables au toucher : 1 boule rouge, 3 boules jaunes et $n$ boules noires. ($n$ désigne un entier naturel strictement positif).

Un club sportif organise un jeu consistant, pour chaque joueur, à prélever dans le sac une boule au hasard. Si la boule tirée est rouge, le joueur reçoit 5 €, si la boule est jaune, il reçoit 2 € et si la boule est noire, il reçoit 1 €. Pour participer au jeu, le joueur doit acheter un billet d'entrée coûtant 1,70 €.

On note $X_n$ la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée dans le sac, associe le gain algébrique du joueur c'est à dire la somme reçue diminuée du prix du billet.

**1.** Dans cette question seulement, on suppose $n = 6$.

**a.** Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $X_6$ ?

**b.** Déterminer la loi de probabilité de la variable a aléatoire $X_6$.

**c.** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X_6$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que l'entier naturel $n$ est quelconque.

**2.** Étude de la variable aléatoire $X_n$.

**a.** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X_n$.

**b.** Déterminer en fonction de $n$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X_n$

**c.** Le club souhaite que l'espérance de $X_n$ soit strictement négative. Quel doit être le nombre minimal de boules noires contenues dans le sac pour que cette condition soit remplie ?

**PROBLÈME** **11 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, unités graphiques : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

**Partie A :**

On appelle $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

**1.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

**2.** étude de la limite de $f$ en 0

**a.** En utilisant le résultat : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, déterminer la limite de $f$ en 0.

**b.** En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation.

**3.** Étude des variations de $f$.

**a.** Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

**b.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variation de $f$.

**4.** Tracer $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

**Partie B :**

$k$ désigne un entier naturel non nul. On appelle $g$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{1}{x} + k\ln x.$$

On appelle $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de $g$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. En particulier la courbe $\mathcal{C}_1$ est la courbe tracée à la fin de la première partie.

**1.** Étude des variations de $g$.

**a.** Calculer $g'(x)$ pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$

**b.** Démontrer que $g'(x)$ s'annule pour $x = \dfrac{1}{k}$. Exprimer $g\left(\dfrac{1}{k}\right)$ en fonction de $k$.

**c.** Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de $g$. On admettra que $g$ admet en 0 comme en $+\infty$ les mêmes limites que $f$.

**2.** On pose $x_k = \dfrac{1}{k}$ et $y_k = g\left(\dfrac{1}{k}\right)$. On appelle $S_k$ le point de $\mathcal{C}_k$ de coordonnées $\left(x_k\,;\,y_k\right)$.

**a.** Déterminer la limite de la suite $(x_k)$.

**b.** Déterminer la limite de la suite $\left(y_k\right)$.

**c.** Vérifier que, pour tout entier naturel non nul $k$, le point $S_k$ est situé sur la courbe $\Gamma$ d'équation $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$.

**Partie C :**

1. Soit $H$ la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$H(x) = x\ln x - x.$$

   Déterminer la fonction dérivée de $H$ et en déduire une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. Calcul d'aire.

   **a.** Démontrer que la fonction $f$ est positive sur l'intervalle $[1~;~2]$.

   **b.** Calculer l'aire du domaine plan compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. On donnera le résultat final arrondi au mm$^2$.

**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat STI Génie électronique Antilles juin 2005

**EXERCICE 1** **4 points**

Soit (E) l'équation différentielle : $9y'' + \pi^2 y = 0$ où $y$ désigne une fonction de la variable réelle $x$ définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y''$ sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer la solution particulière $f$ de (E) dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées $\left(0\,;\sqrt{3}\right)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -\dfrac{\pi}{3}x$.
3. Montrer que, pour tout réel $x$, $f$ peut s'écrire sous la forme : $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.
4. Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;3]$.

**EXERCICE 2** **5 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit le nombre complexe $z = 1 - \text{i}\sqrt{3}$ et soit A le point d'affixe $z$.

1. Calculer le module et un argument de $z$, donner leur interprétation géométrique puis en utilisant ces deux valeurs, placer le point A.
2. On considère les points B et C d'affixes respectives $z^2$ et $\dfrac{2}{z}$.
   **a.** Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes $z^2$ et $\dfrac{2}{z}$.
   **b.** Écrire sous forme algébrique les nombres complexes $z^2$ et $\dfrac{2}{z}$.
   **c.** Placer dans le plan les points B et C.
3. Montrer que les points A, B et C appartiennent à un cercle dont le centre $\Omega$ a pour affixe $\omega = -\dfrac{3}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**EXERCICE 2** **5 points**

Le plan est rapporte à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]-3\,;\,2[$ par $f(x) = \ln\left(ax^2 + bx + c\right)$.
On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

**Partie A**

Le but de cette partie est de déterminer les réels $a$ $b$ et $c$.

1. Montrer que : pour tout $x \in ]-3\,;\,2[$, $f'(x) = \dfrac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}$.

2. **a.** Traduire les données ci-dessous par des relations entre $a,\ b$ et $c$.
   - La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points A$(0\ ;\ \ln 6)$ et B$\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 2\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)\right)$.
   - Au point B, la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale.

   **b.** Déterminer $a,\ b$ et $c$.

**Partie B - étude de la fonction *f***

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -x^2 - x + 6$$

et $f$ la fonction de la partie A définie sur $]-3\ ;\ 2[$ par $f(x) = \ln[g(x)]$. La courbe $\mathscr{C}$ représentative de $f$ dans le repère précédent est donnée en **ANNEXE**.

1. **a.** Étudier le signe de $g$ sur $\mathbb{R}$.

   **b.** Déterminer les limites suivantes : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\x<2}} f(x)$.

   **c.** En déduire les équations des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$
2. Montrer que : pour tout $x \in ]-3\ ;\ 2[,\ f'(x) = \dfrac{-2x-1}{g(x)}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de $f$.
4. Déterminer une équation de la tangente â $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
5. **a.** Montrer que, sur l'intervalle $[0\,;\,1{,}9]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x_0$.

   **b.** À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de $x_0$ d'amplitude $10^{-2}$.

**Partie C - Calcul d'aire**

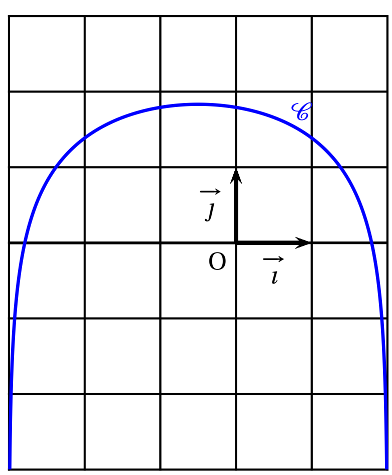
Soit $F$ la fonction définie sur $]-3\ ;\ 2[$ par :

$$F(x) = (x+3)\ln(x+3) + (x-2)\ln(-x+2) - 2x.$$

1. Montrer que $F$ est une primitive de $f$ sur $]-3\ ;\ 2[$.
2. **a.** Préciser à l'aide du graphique le signe de $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   **b.** Calculer la valeur exacte $\mathscr{A}$ (en unités d'aire), de l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

**ANNEXE : courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f**



**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat STI Génie électronique Métropole juin 2005

**EXERCICE 1** **5 points**

1. Le nombre i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$ où $z$ est un nombre complexe.
   **a.** Calculer $P(2)$.
   **b.** Déterminer les nombres réels $a$, $b$ et $c$ tels que $P(z) = (z-2)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   **c.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité 5 cm.
   **a.** Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 2$, $z_{\text{B}} = 1 + \text{i}$, $z_{\text{C}} = 1 - \text{i}$.
   **b.** Déterminer le module et un argument de $z_{\text{A}}$, $z_{\text{B}}$ et $z_{\text{C}}$.
   **c.** Montrer que C est l'image de B par une rotation de centre O dont on précisera l'angle.
   **d.** Déterminer les affixes des points I et J, milieux respectifs des segments [OA] et [BC].
   **e.** Quelle est la nature du quadrilatère OBAC ? Justifier la réponse.

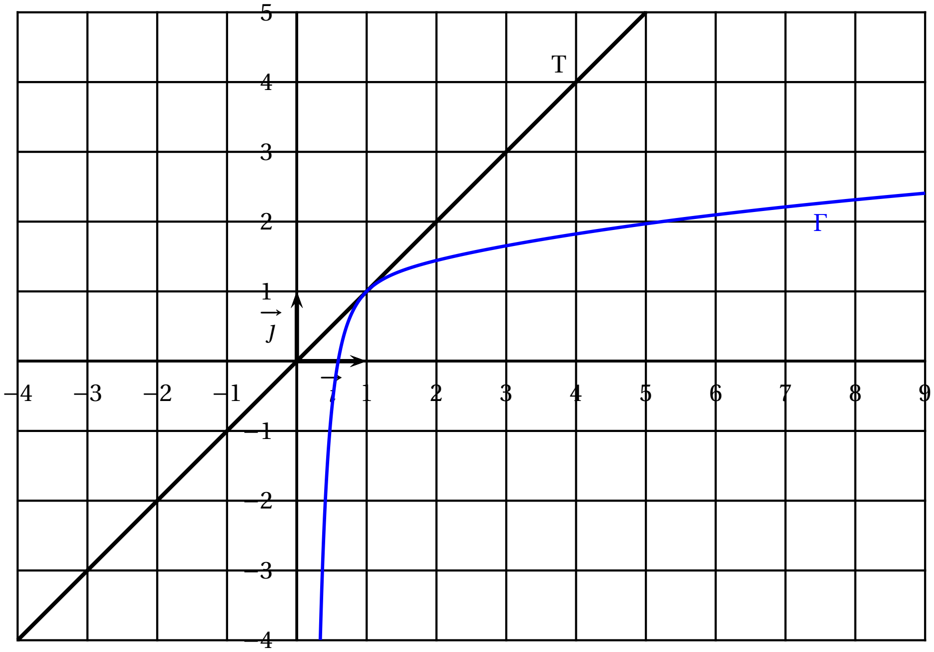
**EXERCICE 2** **4 points**

1. On considère la fonction $f$ définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par
$$f(x) = 3x - 1 + \frac{1}{\text{e}^{2x}}.$$
   **a.** Montrer que la fonction dérivée $f'$ est telle que $f'(x) = \dfrac{3\text{e}^{2x} - 2}{\text{e}^{2x}}$.
   **b.** Résoudre l'équation $f'(x) = 0$, puis justifier l'existence d'un minimum et en donner la valeur exacte.
   **c.** Dresser le tableau de variations de $f$ (les limites en $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas demandées).
2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 6x + 1$ où $y$ est une fonction de la variable réelle $x$ et $y'$ sa dérivée.
   **a.** Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.
   **b.** Démontrer que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x - 1$ est solution de l'équation (E).
   **c.** Vérifier que la fonction $f$ est solution de (E) et que $f(0) = 0$.

**PROBLÈME** **11 points**

**Partie A : étude d'une fonction auxiliaire**

On donne dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ la représentation graphique $\Gamma$ d'une fonction $g$, définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]0~;~+\infty]$.
La droite T passant par O et A(1 ; 1) est tangente en A à la courbe $\Gamma$.
La courbe $\Gamma$ admet pour asymptote verticale l'axe des ordonnées.




**1.** Déterminer graphiquement :

**a.** $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ **b.** $g(1)$ **c.** $g'(1)$.

**2.** On admet que, pour tout réel de l'intervalle $]0~;~+\infty]$,

$$g(x) = \ln x + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

**a.** Exprimer $g(1)$ et $g'(1)$ en fonction de $a$ et $b$.

**b.** Déterminer $a$ et $b$ en utilisant les résultats précédents.

**3.** On suppose que $g$ est définie sur $]0~;~+\infty]$ par $g(x) = \ln x + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$.

**a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $[0,2~;~0,8]$ ; déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0,01 et en déduire une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près par excès.

**b.** En déduire, en utilisant le sens de variations de $g$, le signe de $g(x)$ sur $]0~;~+\infty]$.

**Partie B : étude d'une fonction**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0~;~+\infty]$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

**1. a.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

**b.** Vérifier que l'on peut écrire, pour tout $x$, appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty]$,

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}(x\ln x + 1).$$

**c.** En déduire la limite de $f$ en 0 (on admettra que $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$).

2. **a.** Déterminer la fonction dérivée $f'$ de la fonction $f$ et vérifier que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = g(x)\mathrm{e}^x$.

   **b.** En utilisant le signe de $g$ obtenu précédemment, étudier le sens de variations de $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente $\Delta$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

   **b.** Sur la feuille annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe $\mathscr{C}$. Sur cette figure, tracer la droite $\Delta$.

**Partie C : Calcul d'une aire**

1. On note $a$ un nombre réel tel que $0 < a < 1$.

   **a.** Montrer que la fonction $h$, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par
   $h(x) = \mathrm{e}^x \ln x$ est une primitive de la fonction $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

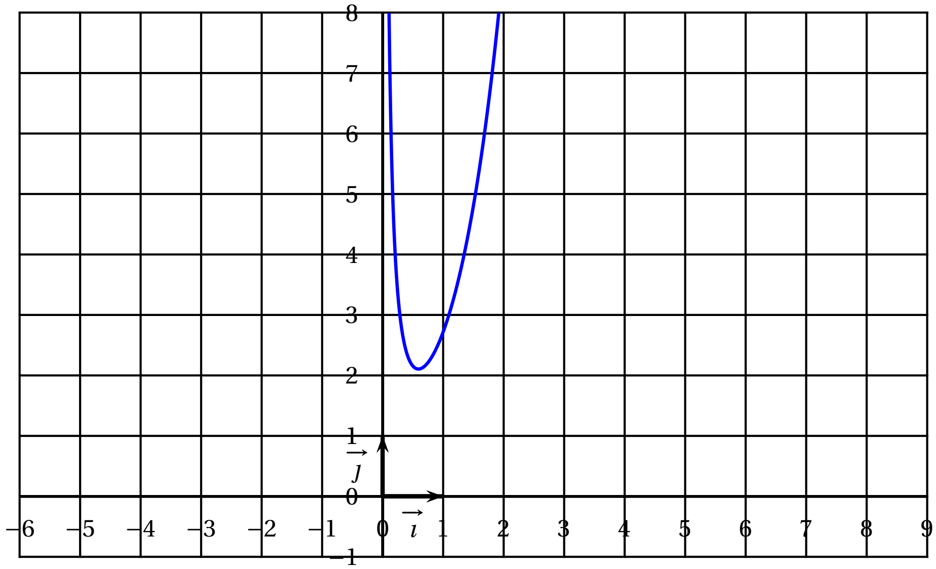
   **b.** En déduire que $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^a \ln a$.

2. $\mathscr{D}$ désigne la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 1$.

   **a.** Sur la feuille annexe, hachurer le domaine $\mathscr{D}$.

   **b.** Calculer la valeur exacte de la mesure, exprimée en unités d'aire, de l'aire de $\mathscr{D}$.

**Feuille annexe**



# ∽ Baccalauréat STI Génie électronique Polynésie ∾<br>8 juin 2005

**EXERCICE 1** **4 points**

Un établissement scolaire propose à chaque élève des sorties culturelles. Celles-ci sont de trois types : théâtre, sport ou cinéma.
On considère que chaque élève choisit de façon aléatoire deux sorties culturelles. On suppose l'équiprobabilité des choix.

**1.** On s'intéresse aux différents choix possibles qui s'offrent à un élève. Ainsi participer à une sortie sport et une sortie théâtre correspond au choix [S; T]. De même participer à deux sorties cinéma correspond au choix [C; C]. On ne tient pas compte de l'ordre des sorties. Dresser la liste des six choix possibles.

**2.** Une sortie théâtre coûte 12 €, une sortie sport coûte 8 €et une sortie cinéma coûte 4 €. On définit une variable aléatoire $X$ qui, à chaque choix, associe la dépense totale pour l'élève. Ainsi, au choix [S; T], la variable aléatoire $X$ associe 20.

**a.** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire $X$.

**b.** Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant, donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ :

| $x_i$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $P[X = x_i]$ | | | | | |

**c.** Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire $X$. Que représente $E(X)$ ?

**EXERCICE 2** **5 points**

La figure sera construite sur la copie et complétée au fur et à mesure de la résolution de l'exercice. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}}$ de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$, B le point d'affixe $z_{\text{B}}$ égale à i et C le point d'affixe $z_{\text{C}}$ égale à 1.

**1.** **a.** Placer les points A, B et C (la construction du point A se fera uniquement avec le compas et on laissera apparents les traits de construction sur la copie).

**b.** Construire le point $E$ tel que $\overrightarrow{\text{O}E} = \overrightarrow{\text{OA}} + \overrightarrow{\text{OB}}$.

**c.** Prouver que le quadrilatère OA$E$B est un losange.

**2.** On note $z_E$ l'affixe du point $E$. écrire le nombre complexe $z_{\text{A}}$ sous forme algébrique, en déduire que $z_E = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\text{i}$.

**3.** **a.** On considère l'application $f$ définie dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}z$. Caractériser la transformation géométrique $r$ associée à $f$.

**b.** Le point $E'$ est l'image du point $E$ par la transformation $r$. On note $z_{E'}$ l'affixe du point $E'$. Sachant qu'un argument de $z_E$ est $\dfrac{5\pi}{12}$ justifier qu'un argument de $z_{E'}$ est $\dfrac{\pi}{4}$ et construire le point $E'$.

**PROBLÈME** **11 points**

**Partie A**

Soit une fonction $f$ définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée dans l'annexe 1 (à remettre avec la copie). Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

1. Déterminer une équation de chacune des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.

**Partie B**

La fonction de la **partie A** est définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x)=\frac{2x}{x+1}-\mathrm{e}^{-x}.$$

1. **a.** Retrouver par le calcul $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   **b.** Retrouver par le calcul $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)$.
2. **a.** On note $f'$ la dérivée de la fonction $f$, déterminer $f'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$.

   **b.** En déduire le tableau de variations de la fonction $f$ sur cet intervalle.

   **c.** Déterminer une équation de la tangente $T$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse zéro ; tracer cette tangente $T$ sur l'annexe 1 (à remettre avec la copie).
3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $[0 ; 1]$ une solution unique $\alpha$ et donner une valeur du nombre réel $\alpha$, arrondie à $10^{-2}$.

**Partie C**

1. Montrer que pour tout $x$ de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ on a :

$$f(x)=2-\frac{2}{x+1}-\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Déterminer une primitive $F$ de la fonction $f$ sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.
3. En déduire la valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0 ; 2]$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à $10^{-1}$.

**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat STI Génie électronique Antilles septembre 2005

**EXERCICE 1** **5 points**

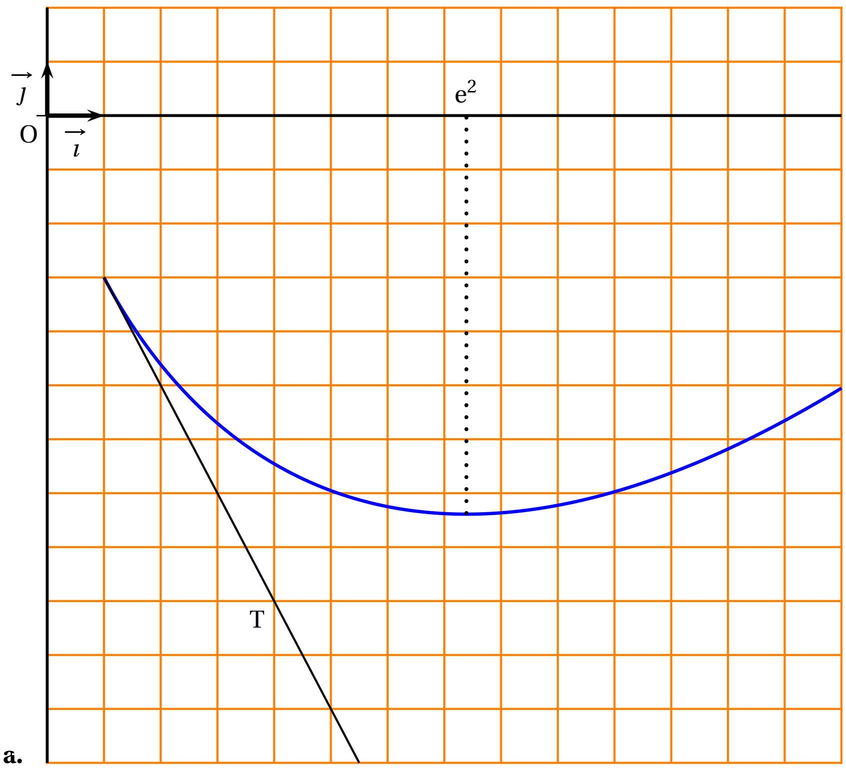
Un professeur d'Éducation Physique et Sportive s'adresse à un groupe de vingt élèves au sujet de leurs loisirs : intérêt pour le football dans la pratique de ce sport ou comme spectacle à la télévision.
Parmi ces vingt élèves, on sait que quinze regardent des matches à la television, huit pratiquent ce sport et cinq font les deux.

1. Montrer que deux élèves dans ce groupe ne s'intéressent au football ni dans la pratique, ni à la télévision.
2. Un élève de ce groupe est choisi au hasard.
   **a.** Quelle est la probabilité qu'il ne s'intéresse au football ni dans la pratique ni à la télévision ?
   **b.** Quelle est la probabilité qu'il s'intéresse au football à la télévision sans le pratiquer ?
3. On interroge au hasard un élève qui regarde les matches à la télévision.
   Quelle est la probabilité qu'il pratique le football ?
4. On attribue au hasard un numéro à chacun des vingt élèves. Une urne comporte 20 jetons avec les numéros en question.
   On tire deux fois au hasard un jeton en le remettant dans l'urne après le premier tirage.
   À chaque tirage, l'élève désigné gagne un billet d'entrée au match de son choix à condition qu'il pratique le football et le suive à la télévision.
   **a.** Déterminer le nombre total de tirages de deux jetons.
   **b.** Déterminer le nombre total de tirages permettant d'obtenir deux billets.
   **c.** Soit X la variable aléatoire définie par le nombre de billets gagnants.
   Définir la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

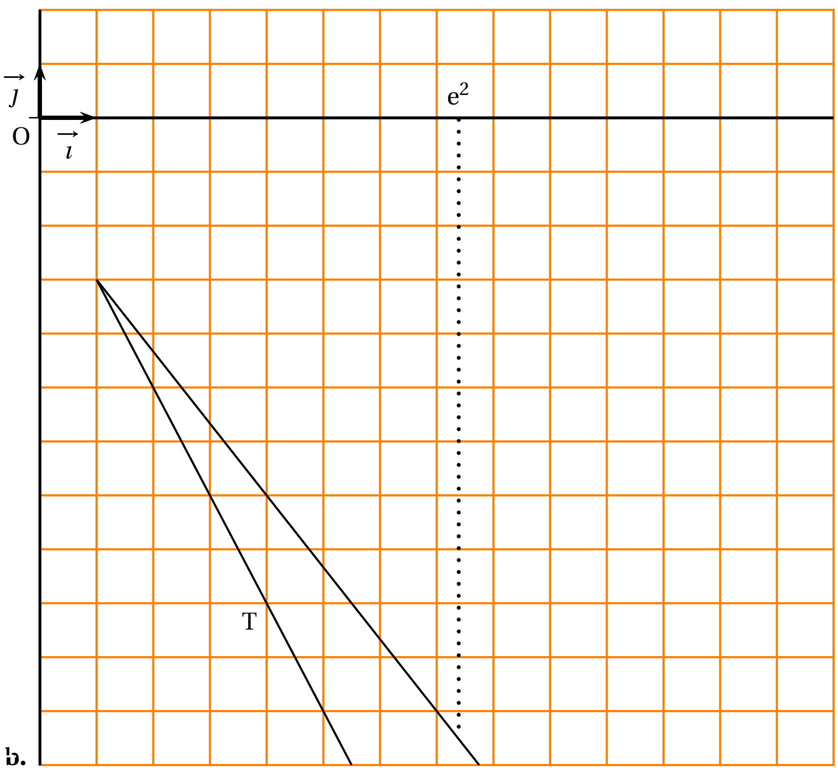
**EXERCICE 2** **4 points**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions suivantes, au moins une réponse est exacte. Indiquer la (ou les) réponse(s) exacte (s) sur votre copie. Aucune justification n'est demandée.*

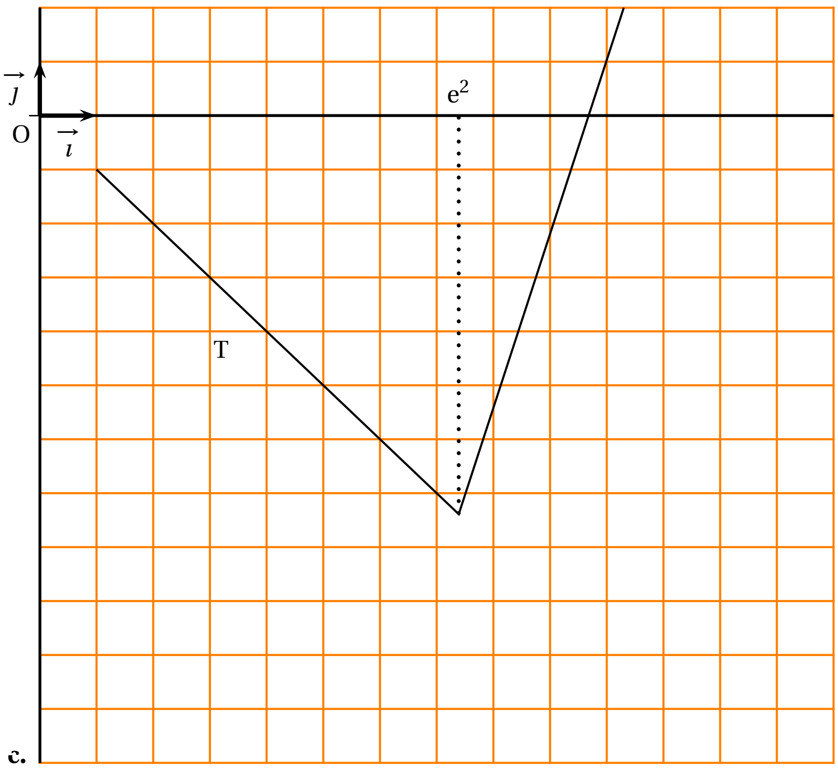
1. On considère l'équation différentielle $y' = -2 + \ln x$. Parmi les courbes ci-dessous, où la droite T représente chaque fois la tangente à la courbe considérée au point d'abscisse 1, quelle est celle susceptible de représenter une solution de cette équation différentielle ?




**a.**

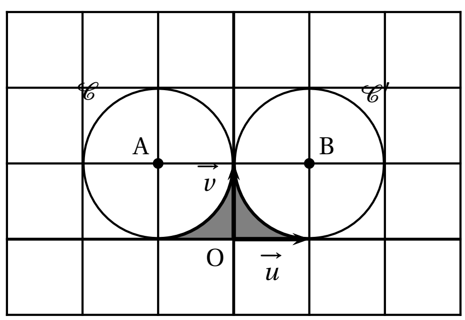



**b.**




**c.**

**2.** Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $Z_A = -1 + i$ et $Z_B = I + i$.
On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon I et $\mathscr{C}'$ le cercle de centre B et de rayon I.
Soit $n$ un entier naturel non nul et $Z_n = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}i\right)^n$.
Pour quelles valeurs de $n$, parmi celles proposées ci-dessous, l'image de $Z_n$ appartient-elle au domaine grisé ?




**a.** $n = 1$.
**b.** $n = 2$.
**c.** $n = 3$.

**3.** La solution particulière $f$, définie sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle

$$y'' + 9y = 0$$

telle que $f(\pi) = -\sqrt{3}$ et $f'(\pi) = 3$ est :
**a.** $f(x) = \sqrt{3}\cos(3x) - \sin(3x)$.
**b.** $f(x) = -\sqrt{3}\cos(3x) + 3\sin(3x)$.

**c.** $f(x) = 3\sin\left(\dfrac{x}{3}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

**4.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$.
La valeur moyenne $\mu$ de la fonction $f$ sur l'intervalle $[\ln 5~;~\ln 10]$ est :

**a.** $\mu = \dfrac{2\ln 2}{75}$.

**b.** $\mu = \dfrac{75}{2\ln 5}$.

**c.** $\mu = \dfrac{75}{\ln 4}$.

**PROBLÈME** **11 points**

**Partie A**

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 1 - 2\ln x.$$

**1.** On désigne par $g'$ la fonction dérivée de $g$.
Déterminer $g'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

**2.** Dresser le tableau de variations de la fonction $g$.
(L'étude des limites aux bornes de l'ensemble de définition n'est pas demandée.)

**3.** Calculer $g(1)$. En déduire que $g$ est strictement positive sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

**Partie B**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\ln x.$$

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ et par $\Gamma$ la courbe d'équation $y = \ln x$.

**1.** Déterminer la limite de la fonction $f$ en zéro. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ ?

**2.** Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

**3.** On désigne par $f'$ la fonction dérivée de $f$.

**a.** Montrer que, pour tout réel $x$ strictement positif :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}.$$

**b.** Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

**4.** On définit sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, la fonction $h$ par :

$$h(x) = f(x) - \ln x.$$

**a.** Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $h$.

**b.** Étudier le signe de la fonction $h$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la courbe $\Gamma$.

**5.** Déterminer une équation de la tangente $\Delta$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.

**6.** Tracer les courbes $\mathscr{C}$, $\Gamma$ et la droite $\Delta$ dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

**Partie C**

1. Soit $H$ la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, par :

$$H(x) = -\left(\frac{1+\ln x}{x}\right).$$

   Montrer que $H$ est une primitive de $h$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. Soit $\alpha$ un nombre réel strictement supérieur à 1.
   Calculer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$, en cm$^2$, du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, la courbe $\Gamma$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

3. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ quand $\alpha$ tend vers $+\infty$.

**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat STI Métropole septembre 2005
# Génie électronique, électrotechnique, optique

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Une feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

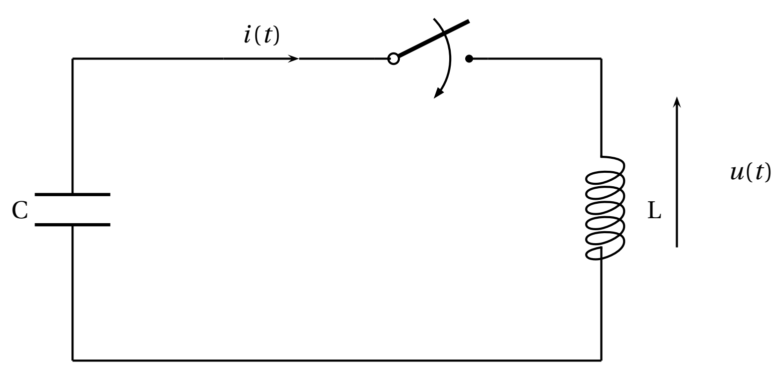
**EXERCICE 1** **5 points**

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité 2 cm.
$\Gamma$ est le cercle de centre O et de rayon 1.
A est le point d'affixe $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}$.

1. Démontrer que le point A appartient au cercle $\Gamma$.
2. Soit $r$ la transformation qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z' = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}z$.
   a. Démontrer que l'affixe $b$ du point B image de A par $r$ est égal, à $-\text{i}$.
   b. Le point B appartient-il au cercle $\Gamma$ ?
   c. Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.
3. Donner l'affixe $c$ du point C diamétralement opposé au point A sur le cercle $\Gamma$.
4. Soit $t$ la transformation du plan qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z' = z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}$.
   Démontrer que l'affixe $d$ du point D image de C par la transformation $t$ est égale à i.
5. Tracer le cercle $\Gamma$ et placer les points A, B, C, D dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
6. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.
   a. Écrire le nombre complexe $a$ sous forme exponentielle.
   b. Déterminer la forme algébrique de $a^6$.
   c. Le point d'affixe $a^6$ appartient-il à $\Gamma$ ?

**EXERCICE 2** **4 points**

Un circuit est composé d'une bobine d'inductance $L$, mesurée en farads, d'un condensateur de capacité C, mesurée en henrys, et d'un interrupteur. L'unité de temps est la seconde



On sait que :
$C = 125 \cdot 10^{-6}$ et $L = 200 \cdot 10^{-3}$.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, le circuit est alors parcouru par un courant.
On désigne par $q(t)$ la charge, mesurée en coulombs, du condensateur, $i(t)$, l'intensité, mesurée en ampères, du courant qui parcourt le circuit et $u(t)$ la tension, mesurée en volts, aux bornes de la bobine à l'instant $t$.
À l'instant $t = 0$, la charge du condensateur, mesurée en coulombs, est $10^{-3}$ et l'intensité du courant qui parcourt le circuit est nulle. On a donc les conditions initiales suivantes : $q(0) = 10^{-3}$ et $q'(0) = 0$.

**1.** On admet que la charge du condensateur est solution de l'équation différentielle (E) :

$$q''(t) + \frac{1}{\mathrm{LC}} q(t) = 0.$$

**a.** Résoudre l'équation différentielle (E).

**b.** Démontrer que l'unique solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales est la fonction $q$ définie par $q(t) = 10^{-3}\cos(200t)$ où $t$ est un réel positif.

**2.** Les fonctions $i$ et $u$ définies dans le préambule vérifient pour tout $t$ : $i(t) = -q'(t)$ et $u(t) = -L'(t)$, où $i'$est la dérivée de $i$.

**a.** Montrer que, pour tout $t$, $u(t) = -8\cos(200t)$.

**b.** La tension efficace $\mathrm{U_{eff}}$ aux bornes de la bobine est définie par :

$$(\mathrm{U_{eff}})^2 = \frac{100}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{100}} [u(t)]^2 \,\mathrm{d}t.$$

Déterminer la valeur exacte de $\mathrm{U_{eff}}$
$\left(\text{on pourra utiliser la relation } \cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}\right)$.

**PROBLÈME** **11 points**

**A. étude d'une fonction auxiliaire**

On considère la fonction $g$ définie sur l'ensemble des réels par

$$g(x) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x}.$$

**1.** Montrer que : $g(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{x} - 5\right)$.

**2.** Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

**B. Étude de $f$ et tracé de sa courbe représentative**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} - 2x + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

**1.** Vérifier que pour tout réel $x$ :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\frac{3}{2}\mathrm{e}^{x} - 5 - \frac{2x}{\mathrm{e}^{x}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right).$$

En déduire la limite de $f$ en $+\infty$.

2. **a.** Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.
   **b.** Montrer que la droite $D$ d'équation $y = -2x+1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.
   **c.** Montrer que pour tout réel $x$, $g(x) = f(x) - (-2x+1)$.
   En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $D$ sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout réel $x$,

$$f'(x) = \left(3e^x + 1\right)\left(e^x - 2\right).$$

   **b.** Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de $f$.
   On précisera la valeur exacte du minimum.
4. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3e^{2x} - 5e^x = 0$.
   **b.** En déduire qu'il existe un unique point A de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente $T$ est parallèle à la droite $D$.
5. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $[1 ; 2]$.
   **b.** Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.
6. Sur une feuille de papier millimètre, tracer $D$, $T$ et $\mathscr{C}$.

**C. Calcul d'aire**

On considère le domaine $\Delta$ du plan compris entre la droite $D$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$ où $\lambda$ est un réel strictement négatif.
On note $\mathscr{A}(\lambda)$ la mesure, exprimée en unités d'aire, de l'aire de ce domaine.

1. Hachurer sur le graphique le domaine $\Delta$.
2. Démontrer que, pout tout réel strictement négatif $\lambda$,

$$\mathscr{A}(\lambda) = \left(\frac{17}{4} + \frac{3}{4}e^{2\lambda} - 5e^{\lambda}\right).$$

3. Calculer $\displaystyle\lim_{\lambda \to -\infty} \mathscr{A}(\lambda)$.

**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat STI novembre 2005<br>Génie électrique Nouvelle Calédonie

*Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.*

**EXERCICE 1** **5 points**

Soit i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Pour tout nombre complexe $z$, on pose $P(z) = 2z^3 - 10z^2 + 21z - 18$.

1. Calculer $P(2)$, puis déterminer les réels $a, b$ et $c$ tels que pour tout nombre complexe $z$ on ait $P(z) = (z-2)\left(az^2 + bz + c\right)$.
2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $2z^2 - 6z + 9 = 0$, puis en déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 2 cm).

   On considère les points $A$ et $B$, d'affixes respectives $z_A = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\text{i}$ et $z_B = \overline{z_A}$, ainsi que les points $C$ et $D$ d'affixes respectives $z_C$ et $z_D$ telles que $z_C = -z_A$ et $z_D = \text{i}z_A$.

   **a.** Écrire les nombres complexes $z_C$ et $z_D$ sous forme algébrique.

   **b.** Sur la copie, placer les points $A, B, C$, et $D$ dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   **c.** Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$ ? Justifier la réponse.

**EXERCICE 2** **4 points**

Une entreprise fabrique quatre type de pièces notées $P_1, P_2, P_3$ et $P_4$ et possède trois machines $A, B$ et $C$ pour procéder à leur conception.

- La fabrication de la pièce $P_1$ nécessite l'utilisation de chacune des machines $A$ et $B$.
- La fabrication de la pièce $P_2$ nécessite l'utilisation de chacune des machines $B$ et $C$.
- La fabrication de la pièce $P_3$ nécessite l'utilisation de chacune des machines $A$ et $C$.
- La fabrication de la pièce $P_4$ nécessite l'utilisation de chacune des trois machines $A, B$ et $C$.

On considère un échantillon de 2 000 pièces où il y a 700 pièces de type $P_1$, 1 000 pièces de type $P_2$, 200 pièces de type $P_3$ et 100 pièces de type $P_4$.
On choisit au hasard une pièce dans l'échantillon. Il y a équiprobabilité des choix.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :

   **a.** « la pièce choisie est de type $P_1$ ».

   **b.** « la fabrication de la pièce choisie a nécessité l'utilisation de la machine $B$ ».
2. Pour produire une pièce, l'utilisation de la machine $A$ coûte 5 €, celle de la machine $B$ coûte 4 € et celle de la machine $C$ coûte 2 €. On appelle $X$ la variable aléatoire qui, à chaque pièce choisie dans l'échantillon, associe son coût de réalisation. Ainsi la réalisation de la pièce $P_1$ coûte 9 €.

   **a.** Déterminer le coût de réalisation de chacune des pièces $P_2, P_3$ et $P_4$.

   **b.** Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$.

   **c.** Quel est le coût moyen de fabrication d'une pièce dans l'échantillon ?

**PROBLÈME** **11 points**

**Partie A :**

Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x - 2 + \frac{1}{x}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction $g$ aux bornes de l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Calculer la dérivée $g'$ de la fonction $g$ et étudier le signe de $g'(x)$ pour $x$ appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. Construire le tableau de variations de la fonction $g$.
4. Déterminer, en justifiant votre réponse, le signe de la fonction $g$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

**Partie B :**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 4x - 1 + 2\ln x.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. Déterminer la limite de la fonction $f$ en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. En remarquant que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2\ln x}{x^2}\right)$, déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x$ de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, on a $f'(x) = 2g(x)$ (donner le détail des calculs).
4. étudier les variations de la fonction $f$ et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
5. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée $\alpha$ dans l'intervalle $[3~;~4]$.

   **b.** Donner un encadrement de $\alpha$ à $10^{-1}$ près.
6. **a.** Préciser $f'(1)$ et la tangente $T$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

   **b.** Représenter graphiquement la tangente $T$ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

**Partie C :**

1. Soit la fonction $H$ définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

   $$H(x) = x\ln x - x.$$

   **a.** Montrer que la fonction $H$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   **b.** En déduire une primitive $F$ de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Calculer la valeur moyenne de $f$ sur l'intervalle $[1;3]$ : donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie au centième.

**Durée : 4 heures**

# ∾ Baccalauréat STI Antilles–Guyane juin 2005 ∾
# Génie mécanique, génie des matériaux

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

**EXERCICE 1** **5 points**

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On note A et B les points d'affixes respectives : $z_A = 2 + 2\sqrt{3}i$ et $z_B = 6 + 2\sqrt{3}i$.

1. **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes $z_A$ et $z_B$.
   **b.** Que vaut la distance OA ? En déduire une construction du point A. (On expliquera la méthode de construction utilisée)
   Placer le point B.
2. **a.** Démontrer que le triangle OAB est isocèle.
   **b.** Donner une mesure de chacun des angles de vecteurs $\left(\vec{u},\,\overrightarrow{OA}\right)$ et $\left(\vec{u},\,\overrightarrow{OB}\right)$. En déduire la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$, puis la mesure de chacun des angles géométriques $\widehat{ABC}$ et $\widehat{OAB}$.
3. Soit F le point d'affixe $z_F = 4\sqrt{3}i$.
   **a.** Placer le point F.
   **b.** Démontrer que le triangle OBF est équilatéral.
   **c.** Calculer $|z_A - z_F|$. Que représente le point A pour le triangle OBF ?

**EXERCICE 2** **5 points**

Dans une foire un forain propose le jeu suivant.
On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, puis on fait tourner une roue portant les numéros 0, 1, 2, 3. On obtient ainsi un couple $(a\,;\,b)$ où le nombre $a$ est lu sur la face supérieure du dé, le nombre $b$ est indiqué par la roue.
On suppose dans tout l'exercice que tous les couples $(a\,;\,b)$, avec $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $b \in \{0, 1, 2, 3\}$, ont la même probabilité d'être obtenus.
Le résultat du jeu est le nombre $a \times b$, produit des nombres $a$ et $b$ du couple $(a\,;\,b)$ obtenu.

1. Recopier le tableau suivant et le compléter en indiquant les résultats possibles pour un jeu.

| | Nombre $a$ lu sur le dé : | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre $b$ lu sur la roue | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | | | | 0 | | |
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | 6 | | | |
| 3 | | | | | 15 | |

2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   — $A$ : « Le résultat du jeu est un nombre qui appartient à l'intervalle $[5\,;\,9]$. » ;
   — $B$ : « Le résultat du jeu a été obtenu à partir d'un numéro impair sur la roue. » ;
   — $C = A \cap B$ ;

— $D = A \cup B$.

3. Si le résultat du jeu est égal à 18, le joueur reçoit 10 € ; si le résultat du jeu appartient à l'intervalle [10 ; 17] , le joueur reçoit 5 € ; si le résultat du jeu appartient à l'intervalle [5 ; 9], le joueur reçoit 1 € ; dans les autres cas le joueur ne reçoit rien et ne perd rien.

   Soit X la variable aléatoire qui, pour chaque jeu, prend pour valeur la somme reçue par le joueur.

   **a.** Donner, sous forme de tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$.

   **b.** Calculer l'espérance mathématique, notée $E(X)$, de la variable aléatoire $X$.

   **c.** Sur l'ensemble de la durée de la foire, le forain compte avoir 2 000 participants à ce jeu. S'il demande 2 € de participation à chaque joueur, quel gain net pourra-t-il espérer à l'issue de la foire ?

**PROBLÈME** **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.
On considère les deux fonctions $f$ et $g$ définies pour tout nombre réel $x$, par :

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{x} - x^2 - 2x \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 - 2x.$$

On nomme $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{P})$ les courbes représentatives respectives des fonctions $f$ et $g$ relativement au repère orthogonal $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

**Partie A - Étude de la fonction $g$**

1. Calculer la limite de la fonction $g$ en $+\infty$ et sa limite en $-\infty$.
2. On note $g'$ la fonction dérivée de la fonction $g$. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel $x$.
3. Donner le tableau des variations de la fonction $g$.

**Partie B - Étude de la fonction $f$**

1. **a.** Vérifier que, pour tout nombre réel $x$ non nul, $f(x) = x^2\left(2\mathrm{e}^{x} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$. En déduire la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

   **b.** Calculer la limite de la fonction $f$ en $-\infty$.

2. **a.** On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$.
   Montrer que, pour tout nombre réel $x$, $f'(x) = 2(x+1)\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)$.

   **b.** Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'inéquation : $\mathrm{e}^{x} - 1 \geqslant 0$.
   En déduire, à l'aide d'un tableau de signes, le signe de $f'(x)$ pour $x$ réel.

   **c.** Établir le tableau des variations de la fonction $f$ ; y faire figurer les valeurs exactes des extremums.

**Partie C - Tracé des courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{P})$**

1. **a.** Pour tout $x$ réel, calculer $f(x) - g(x)$, puis $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)]$. Quelle conclusion peut-on en tirer pour les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{P})$ ?

   **b.** Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ selon les valeurs du réel $x$. En déduire les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{P})$.

2. On nomme $\alpha$ l'unique solution non nulle de l'équation $f(x) = 0$, et A le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse $\alpha$.
   À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée décimale de $\alpha$ arrondie à $10^{-2}$.
3. Recopier le tableau suivant et le compléter avec les valeurs approchées décimales de $f(x)$ et $g(x)$ arrondies à $10^{-2}$.

| $x$ | $-2,5$ | $-2$ | $-1$ | $-0,5$ | 0 | 0,5 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |
| $g(x)$ | | | | | | | |

4. Dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, placer le point A défini à la question C. 2., puis tracer les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{P})$.

**Partie D - Calcul d'une aire**

1. Soit $h$ la fonction définie par : pour tout nombre réel $x$, $h(x) = (x-1)\text{e}^x$.
   **a.** On note $h'$ sa fonction dérivée. Pour tout $x$ réel, calculer $h'(x)$.
   **b.** En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \longmapsto -2x\text{e}^x$.
2. Soit $\mathscr{S}$ la surface plane délimitée par les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{P})$ et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = 0$. On note $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en cm$^2$, de la surface $\mathscr{S}$.
   Hachurer la surface $\mathscr{S}$ sur le graphique de la partie C.
   Calculer $\mathscr{A}$. En donner la valeur exacte, puis une valeur décimale approchée à $10^{-2}$ près.

**Durée : 4 heures**

# ∾ Baccalauréat STI Génie des matériaux Métropole ∾ juin 2005

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

**EXERCICE 1** **5 points**

Tous les résultats demandés seront justifiés.

Soit le nombre complexe $z_1 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$. On pose :

$z_2 = \overline{z_1}$, où $\overline{z_1}$ désigne le nombre complexe conjugué de $z_1$,

$z_3 = -z_1$ ,

$z_4 = z_1\text{e}^{\frac{2\text{i}\pi}{3}}$.

1. Déterminer la forme algébrique des nombres complexe $z_1$, $z_2$ et $z_3$.
2. Déterminer le module et un argument des nombres complexes $z_2$ et $z_3$.
3. **a.** Montrer que $z_4 = 3\text{e}^{\frac{5\text{i}\pi}{6}}$

   **b.** En déduire le module et un argument du nombre complexe $z_4$.

   **c.** Quelle est la forme algébrique de $z_4$ ?
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (Unité graphique : 2 cm).

   On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_1$, $z_2$, $z_3$ et $z_4$.

   **a.** Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. Construire ce cercle.

   **b.** Construire les points A, B, C et D en utilisant leurs ordonnées.

   **c.** Calculer les distances AC et BD.

   **d.** Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

**EXERCICE 2** **4 points**

1. Résoudre l'équation différentielle : $9y'' + y = 0$.
2. Déterminer la solution $f$ de cette équation différentielle vérifiant les conditions initiales :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(0) & = & \sqrt{3} \\ f'(0) & = & -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

3. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel $x$, on peut écrire : $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

   **b.** Résoudre, dans l'ensemble des nombres réels, l'équation $f(x) = -\sqrt{2}$.
4. Calculer la valeur moyenne $m$ de $f$ sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

**PROBLÈME** **11 points**

Soit $f$ la fonction numérique définie, pour tout nombre réel $x$, par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\text{e}^{2x} + \text{e}^{x} - 2x.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (Unité graphique 2 cm).

**1.** Comportement de $f$ en $-\infty$.

**a.** Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.

**b.** Démontrer que la droite $\Delta$ d'équation $y = -2x$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.

**c.** Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\Delta$.

**2.** Comportement de $f$ en $+\infty$.

**a.** Montrer que, pour tout nombre réel $x$ différent de 0, on peut écrire :

$$f(x)x\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2x}+\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}-2\right).$$

**b.** En déduire la limite de $f$ en $+\infty$.

**3.** Étude des variations de $f$.

**a.** Déterminer la fonction dérivée $f'$ de $f$ et vérifier que l'on a pour tout nombre réel $x$,

$$f'(x) = \left(\mathrm{e}^{x}+2\right)\left(\mathrm{e}^{x}-1\right).$$

**b.** Étudier le signe de $f'(x)$, lorsque $x$ décrit l'ensemble des nombres réels.

**c.** Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

**4.** Tracer la droite $\Delta$ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

**5.** Calcul d'une aire.

Soit $\alpha$ un nombre réel strictement négatif.

**a.** Hachurer la partie $\mathscr{H}$ du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\Delta$ et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$.

**b.** Calculer, en fonction de $\alpha$ et en unités d'aire la valeur de l'aire de la partie $\mathscr{H}$, que l'on notera $\mathscr{A}(\alpha)$.

**c.** Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ quand $\alpha$ tend vers $-\infty$. Interpréter le résultat obtenu.

# ∽ Baccalauréat STI Antilles-Guyane septembre 2005 ∾
# Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

**EXERCICE 1** **4 points**

Dans tout cet exercice, on note $g$ la fonction numérique définie pour tout nombre réel $x$, par :

$$g(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right).$$

**1.** Soit (E) l'équation différentielle :

$$4y'' = -y,$$

où $y$ est une fonction de la variable réelle $x$.

**a.** Donner la solution générale de l'équation différentielle (E).

**b.** On note $f$ la solution particulière de l'équation différentielle (E) qui vérifie : $f(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f'(0) = \frac{1}{4}$.
Démontrer que la fonction $f$ est égale à la fonction $g$.

**2.** Soit $\mu$ la valeur moyenne de la fonction $g$ sur l'intervalle $\left[\frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{14\pi}{3}\right]$.

**a.** Calculer $\mu$.

**b.** Recopier et compléter le tableau ci-dessous en indiquant des valeurs exactes :

| $x$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{8\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{3}$ | $\frac{14\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}$ | | | | | |
| $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ | | | | | |

**c.** Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $g$ sur l'intervalle $\left[\frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{14\pi}{3}\right]$.
Tracer la couche $\mathscr{C}$.

**d.** La valeur de $\mu$ trouvée en a. est-elle cohérente avec le graphique effectué en c ?
Pourquoi ?

**EXERCICE 2** **4 points**

Un jeu consiste à tirer une boule dans une urne qui contient des boules rouges, des boules vertes et des boules noires.
La règle du jeu indique que :

- si la boule tirée est rouge, l'organisateur du jeu donne 1 € au joueur
- si la boule tirée est verte, l'organisateur du jeu donne 2 € au joueur
- si la boule tirée est noire, l'organisateur du jeu donne 0,50 € au joueur.

On admet que lors de chaque tirage. toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
On note :

- $p_R$ la probabilité de tirer une boule rouge
- $p_V$ la probabilité de tirer une boule verte

- $p_{\text{N}}$ la probabilité de tirer une boule noire.

**Partie A**

Dans cette partie, on suppose que le nombre de boules rouges, le nombre de boules vertes et le nombre de boules noires contenues dans l'urne sont tels que

$$p_{\text{V}} = 2p_{\text{R}} \quad \text{et} \quad p_{\text{R}} = 2p_{\text{N}}$$

On rappelle que, les boules contenues dans l'urne étant soit rouges, soir vertes, soit noires, on a l'égalité

$$p_{\text{R}} + p_{\text{V}} + p_{\text{N}} = 1$$

**1.** Calculer $p_{\text{R}},\ p_{\text{V}}$ et $p_{\text{N}}$. (Donner les valeurs exactes.)

**2.** Sachant que l'urne contient 3 boules noires, calculer le nombre total de boules contenues dans l'urne, ainsi que le nombre de boules rouges et le nombre de boules vertes contenues dans l'urne.

**3.** Soit $X$ la variable aléatoire qui à chaque tirage d'une boule associe la somme reçue par le joueur.

**a.** Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$, puis calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire $X$.

**b.** Si l'organisateur du jeu vendait $1,50$ € un ticket donnant le droit d'effectuer en tirage, quel bénéfice pourrait-il espérer avoir réalisé à l'issue de 1 000 jeux.

**Partie B**

[Dans cette partie, on suppose que l'organisateur du jeu a rajouté des boules noires dans l'urne : l'urne contient 12 boules vertes, 6 boules rouges, $n$ boules noires.

**1.** Exprimer, en fonction de $n$, la probabilité de tirer une boule verte, la probabilité de tirer une boule rouge et la probabilité de tirer une boule noire.

**2.** Soit $Y$ la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme reçue par le joueur.

**a.** Exprimer, en fonction de $n$, l'espérance mathématique $E(Y)$ de la variable aléatoire Y.

**b.** L'organisateur du jeu vend $1,50$ € le ticket donnant le droit d'effectuer un tirage.
Comment peut-il choisir le nombre $n$ de boules noires pour pouvoir espérer réaliser un bénéfice de 500 € à l'issue de 1 000 jeux?

**PROBLÈME** **12 points**

Le plan est rapporte à un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

**Partie A - étude d'une fonction auxiliaire**

Soie $g$ la fonction numérique définie pour tout réel $x$ strictement positif, par :

$$g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x.$$

**1.** On nomme $g'$ la fonction dérivée de la fonction $g$.
Calculer $g'(x)$ pour tout réel $x$ strictement positif.

**2.** **a.** Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et donner le tableau des variations de la fonction $g$ (les limites en 0 et en $+\infty$ ne sont pas demandées).

**b.** Préciser la valeur exacte de $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et en déduire le signe de $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

**c.** Donner le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

**Partie B - étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative**

Soit $f$ la fonction numérique définie pour tout réel $x$ strictement positif, par

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

On note sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

**1. a.** Déterminer la limite de la fonction $f$ en 0. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

**b.** Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

**2. a.** On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$.
Montrer que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2},$$

où $g$ est la fonction définie dans la partie A.

**b.** Donner le tableau des variations de la fonction $f$.

**3.** On nomme $\alpha$ l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

**a.** À l'aide d'une calculatrice, donner la valeur approchée décimale de $\alpha$ arrondie à $10^{-2}$.

**b.** Préciser, dans un tableau, le signe de $f(x)$ pour $x$ réel strictement positif.

**4. a.** On nomme $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = 2x + 1$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
Montrer que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

**b.** La droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ se coupent au point I.
Déterminer les coordonnées du point I.

**c.** étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

**5.** Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ qui est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.

**6.** Sur un même graphique, placer le point I, puis tracer $\mathscr{T}$, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$.

**Partie C - Calcul d'aire**

Soit $F$ la fonction numérique définie pour tout réel $x$ strictement positif, par :

$$F(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

**1.** Montrer que la fonction $F$ est une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

**2.** Soit $\mathscr{S}$ la surface plane limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \text{e}$.

**a.** On note $\mathscr{A}$ l'aire de la surface $\mathscr{S}$ exprimée en unités d'aires. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

**b.** Donner une valeur décimale approchée à $10^{-2}$ près de l'aire de la surface $\mathscr{S}$ exprimée en $\text{cm}^2$.

# Baccalauréat STI Métropole septembre 2005
# Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

**EXERCICE 1** **4 points**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation suivante :

$$2x^2 - 3x - 2 = 0.$$

2. En déduire les solutions dans l'ensemble des nombres réels des équations suivantes :
   **a.** $2\sin x^2 - 3\sin x - 2 = 0$.
   **b.** $2\mathrm{e}^{2x} - 3\hat{\mathrm{e}}^{x} - 2 = 0$.
   **c.** $\ln x + \ln\left(x - \dfrac{3}{2}\right) = 0$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

**EXERCICE 2** **6 points**

On désigne par I l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{6}~;~\dfrac{\pi}{6}\right]$.
Soit $\Gamma$ la représentation graphique dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 6 cm), de la fonction $f$ définie, pour tout nombre réel de I, par :

$$f(x) = \cos 3x.$$

1. **a.** Calculer $f'(x)$ où $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$.
   **b.** Déterminer le tableau de variations de $f$ sur I.
2. **a.** Calculer le coefficient directeur de chacune des tangentes à $\Gamma$ aux points d'abscisses $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$.
   **b.** Dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, tracer les tangentes à $\Gamma$ aux points d'abscisses $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$, puis tracer $\Gamma$.
3. Déterminer l'aire de la partie (S) du plan comprise entre $\Gamma$ et l'axe des abscisses.

**PROBLÈME** **10 points**

**A.**

Soit $f$ la fonction numérique définie, pour tout nombre réel $x$ de $\left]\dfrac{1}{2}~;~+\infty\right[$, tel, par :

$$f(x) = \ln[h(x)] = \ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

1. Étude du comportement de $f$ en $\dfrac{1}{2}$.

   **a.** Calculer $h\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

   **b.** Déterminer la limite de $f$ en $\dfrac{1}{2}$.

   **c.** En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote $\Delta$ dont on donnera une équation.

**2.** étude du comportement de $f$ en $+\infty$ :

   **a.** Calculer la limite de la fonction $h$ en $\infty$

   **b.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

   **c.** En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation.

**3.** Étude des variations de $f$ :

   **a.** Montrer que, pour tout nombre réel $x$ de $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$

$$f(x) = \ln(2x-1) - \ln(2x+1).$$

   **b.** En déduire la fonction dérivée $f'$ de $f$.

   **c.** Étudier le signe de $f'$ sur $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

   **d.** Établir le tableau de variations de $f$ sur $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

**4.** Dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, tracer $\Delta$, puis la courbe $\mathscr{C}$ sur $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$. On placera l'origine du repère au centre de la feuille).

**B.**

Soit $G$ la fonction numérique définie, pour tout nombre réel $x$ de $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par :

$$G(x) = (2x-1)\ln(2x-1) - (2x+1)\ln(2x+1).$$

**1.** Déterminer la fonction dérivée $G'$ de $G$, pour tout nombre réel $x$ de $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

**2.** En déduire une primitive $F$ de la fonction $f$, pour tout nombre réel $x$ de $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

**3.** Calculer, en unités d'aires, l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.
Donner la valeur exacte de cette aire en $\text{cm}^2$, puis sa valeur décimale arrondie au $\text{mm}^2$ près.