Baccalauréat STI Arts appliqués – Métropole septembre 2009

EXERCICE **8 points**

Indiquer si chacune des propositions P1, P2, P3 et P4 suivantes est vraie ou fausse.
Justifiez vos réponses.

1. On considère un jeu de cartes classique de 32 cartes.
   On tire au hasard une carte de ce jeu.
   On considère les évènements suivants :
   C : « la carte tirée est un cœur »
   R : « la carte tirée est un roi »
   $C \cup R$: « la carte tirée est un cœur ou un roi ».
   Pour tout évènement X, on note $p(X)$ sa probabilité.
   (P1) La probabilité de l'évènement $C \cup R$ est :
   $p(C \cup R) = p(C) + p(R) = \dfrac{8}{32} + \dfrac{4}{32} = \dfrac{12}{32}$ c'est-à-dire $p(C \cup R) = \dfrac{3}{8}$.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   On considère la conique d'équation cartésienne : $x^2 + 4y^2 = 16$.
   (P2) Cette conique est une ellipse dont les foyers sont $\text{F}\left(2\sqrt{3} ; 0\right)$ et $\text{F}'\left(-2\sqrt{3} ; 0\right)$.
3. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $F(x) = 5 - x + x\ln(x)$.
   (P3) F est une primitive de la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$.
4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 2$.
   Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm est donnée ci-dessous.
   (P4) L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$ est égale à $\dfrac{8}{3}$ en cm^2.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

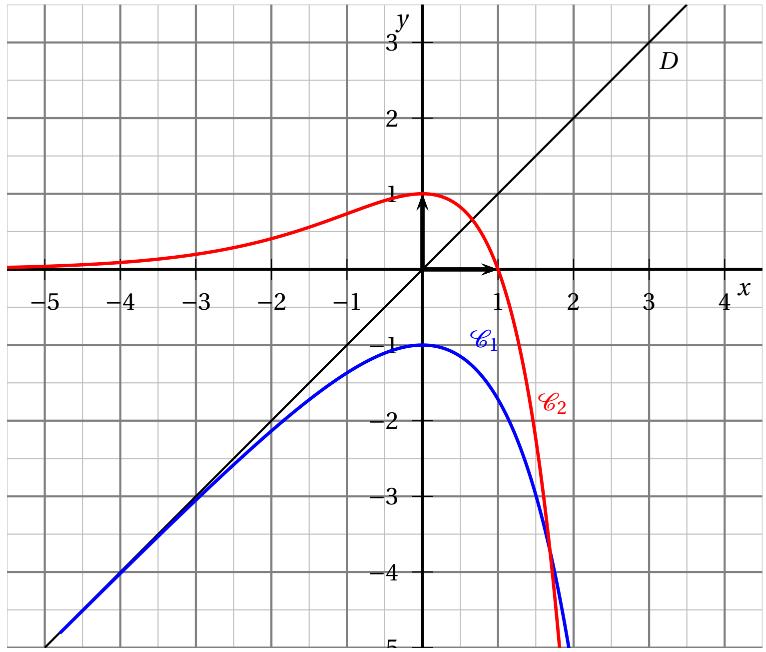
On a tracé ci-dessous, dans un même repère orthonormal d'origine O, les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = (1 - x)\mathrm{e}^x$$

ainsi qu'une droite D passant par l'origine O.

1. Attribuer à chaque fonction sa courbe représentative, en justifiant la réponse.
2. Calculer la limite de $f(x) - x$ quand x tend vers $-\infty$.
   En déduire alors que la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote oblique et en donner une équation.

Partie B : Étude de la fonction g.



1. Calculer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction g puis établir le tableau de variations de la fonction g.
3. Indiquer si la fonction g admet des extremums sur $\mathbb{R}$.

Partie C : Intersection des courbes représentatives de f et g

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Vérifier que pour tout réel x : $h'(x) = 1 - g(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.
2. En utilisant l'étude de la fonction g, déterminer pour tout x réel le signe de $h'(x)$. Donner alors le tableau de variations de la fonction h.
   Les limites de la fonction h en $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas demandées.
3. Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1\ ;\ 2[$.
   À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
4. Déduire de la question précédente que les deux courbes admettent un unique point d'intersection sur l'intervalle $]1\ ;\ 2[$.