Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Antilles-Guyane 13 septembre 2012 Génie mécanique (options A et F), Génie civil, Génie énergétique

EXERCICE 1 **6 points**

1. a. $P(3) = 3^3 - 6 \times 3^2 + 18 \times 3 - 27 = 27 - 54 + 54 - 27 = 0$.

3 est donc un zéro du polynôme P.

Il existe donc des nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z-3)\left(az^2+bz+c\right) = az^3+bz^2+cz-3az^2-3bz-3c = az^3+z^2(b-3a)+z(c-3b)-3c$. En identifiant cette écriture avec celle de l'énoncé, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a &=& 1\\ b-3a &=& -6\\ c-3b &=& 18\\ -3c &=& -27\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a &=& 1\\ b &=& 3-6\\ 9-3b &=& 18\\ c &=& 9\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a &=& 1\\ b &=& -3\\ -3 &=& b\\ c &=& 9\end{array}\right. .$$

On a donc

$$P(z) = z^3 - 6z^2 + 18z - 27 = (z-3)\left(z^2 - 3z + 9\right).$$

b. Résolution de l'équation du second degré :

$\Delta = 9 - 4 \times 9 = -3 \times 9 = \left(3\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 < 0$.

L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$\frac{3+3\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3-3\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

2. a. $z_{\mathrm{A}} = 3 = 3\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0$;

$z_{\mathrm{B}} = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. On a $|z_{\mathrm{B}}|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{27}{4} = \frac{36}{4} = 9 = 3^2 \Rightarrow |z_{\mathrm{B}}| = 3$.

En factorisant ce module :

$z_{\mathrm{B}} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

$z_{\mathrm{F}} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, donc $|z_{\mathrm{F}}|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{27}{4} = \frac{36}{4} = 9 = 3^2 \Rightarrow |z_{\mathrm{F}}| = 3$.

En factorisant ce module :

$z_{\mathrm{F}} = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = 3\left(\cos\frac{-\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{3}\right) = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

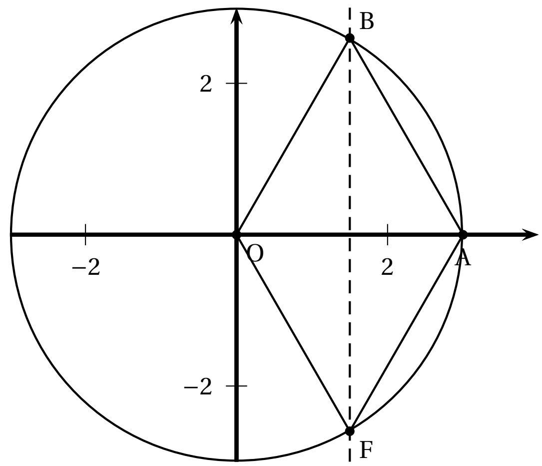
b. Comme $|z_{\mathrm{A}}| = 3$, $|z_{\mathrm{B}}| = 3$ et $|z_{\mathrm{F}}| = 3$, on a donc OA = OB = OF = 3 : les trois points A, B et F appartiennent au cercle centré en O de rayon 3.

c. On place B et F sur le cercle précédent et la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$. Voir la figure à la fin de l'exercice.

d. On a $\mathrm{AB}^2 = |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}|^2 = \left|\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} - 3\right|^2 = \left|-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|^2 = \frac{9}{4}\frac{27}{4} = \frac{36}{4} = 9 = 3^2 \Rightarrow \mathrm{AB} = 3$.

De même $\mathrm{AF}^2 = |z_{\mathrm{F}} - z_{\mathrm{A}}|^2 = \left|\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} - 3\right|^2 = \left|-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|^2 = \frac{9}{4}\frac{27}{4} = \frac{36}{4} = 9 = 3^2 \Rightarrow \mathrm{AF} = 3$.

On a donc OA = OB = AB = AF = 3 : le quadrilatère OABF quatre côtés de même longueur : c'est un losange. (mais pas un carré puisque $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{OF}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = \frac{\pi}{3}$).



EXERCICE 2 **4 points**

1. **a.** Graphiquement on voit que cette équation a 8 solutions dans l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.

   b. $f(x) = 2 \iff 2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2 \iff \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \iff$
   $2x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} \iff 2x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \iff 2x = \dfrac{4\pi}{6} + k2\pi \iff 2x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \iff x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$
   avec $k \in \mathbb{Z}$.
   Sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$, les solutions sont $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, -\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{5\pi}{3}$.

2. **a.** On sait la solution générale de l'équation $y'' + 2^2 y = 0$ est
   $y = A\cos 2x + B\sin 2x$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

   b. On a $g'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$, donc
   $g(0) = -1 \iff A = -1$ et
   $g'(0) = 2\sqrt{3} \iff 2B = 2\sqrt{3} \iff B = \sqrt{3}$.
   La solution particulière est donc définie par $g(x) = -\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$.

   c. D'après la formule rappelée :
   $f(x) = 2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2\sin 2x \cos\dfrac{\pi}{6} - 2\cos 2x \sin\dfrac{\pi}{6} =$
   $2\sin(2x) \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 2\cos(2x) \times \dfrac{1}{2} = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = g(x)$.
   Donc $f(x) = g(x)$.

PROBLÈME **10 points**

PARTIE A : Étude de la fonction *f*

1. Le dénominateur $e^x + 5$ ne peut s'annuler puisqu'il est supérieur à 5. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet ensemble :
   $f'(x) = \dfrac{6e^x(e^x+5) - e^x \times 6e^x}{(e^x+5)^2} = \dfrac{(e^x)^2 + 30e^x - (e^x)^2}{(e^x+5)^2} = \dfrac{30e^x}{(e^x+5)^2}$.
   Tous les termes de ce quotient sont supérieurs à zéro, donc $f'(x) > 0$, quel que soit le réel x : la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** En multipliant chaque terme du quotient par le nombre non nul e^{-x}, on obtient :
   $f(x) = \dfrac{6e^x \times e^{-x}}{e^{-x}(e^x+5)} = \dfrac{6}{1+5e^{-x}}$.

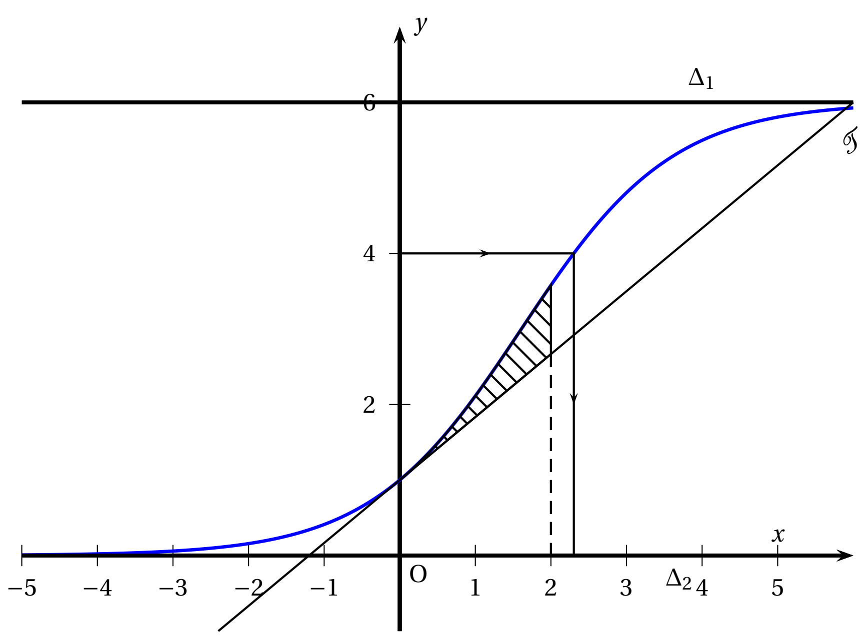
b. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{6}{1} = 6$.
Géométriquement ce résultat signifie que la droite Δ_1 d'équation $y = 6$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

D'autre part on sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} + 5 = 5$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{0}{5} = 0$.
Géométriquement ce résultat signifie que la droite Δ_2 d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de moins l'infini.

3. On a vu que la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$ de 0 à 6.

4. On a $f(0) = \dfrac{6}{1+5} = 1$.
$f'(0) = \dfrac{30\mathrm{e}^0}{\left(\mathrm{e}^0 + 5\right)^2} = \dfrac{30}{25} = \dfrac{6}{5}$.
Une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse 0 est :
$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \iff y - 1 = \dfrac{6}{5}x \iff y = \dfrac{6}{5}x + 1$.

5.



PARTIE B : Résolution d'une équation

1. Sur l'intervalle $[1 ; 5]$, f est strictement croissante; de plus $f(1) = \dfrac{6\mathrm{e}}{\mathrm{e}+5} \approx 2,113$ et $f(5) = \dfrac{6\mathrm{e}^5}{\mathrm{e}^5+5} \approx 5,804$. Comme $4 \in [2,113 ; 5,804]$, la droite d'équation $y = 4$ coupe $\mathscr{C}$ en un point unique x_0 tel que $f(x_0) = 4$.

2. Le graphique montre que $2 < x_0 < 3$.

3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la valeur décimale arrondie au centième de x_0. La calculatrice donne $2,303 < x_0 < 2,304$.
La valeur décimale arrondie au centième de x_0 est 2,30.

PARTIE C : Un calcul d'aire

1. **a.** On a $\mathrm{e}^x + 5 \geqslant 5 > 0$, donc G est bien définie sur $\mathbb{R}$ et :

   $G'(x) = \dfrac{()'}{\mathrm{e}^x + 5} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 5} = g(x)$.

   G est donc une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

   b. $h(x) = \dfrac{6\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 5} - \left(\dfrac{5}{6}x + 1\right)$. D'après la question précédente une primitive de $\dfrac{6\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 5}$ est $6\ln\left(\mathrm{e}^x + 5\right)$;

   D'autre part une primitive de $\dfrac{5}{6}x + 1$ est $\dfrac{5}{6}\dfrac{x^2}{2} + x$.

   Donc une primitive H de la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $H(x) = 6\ln\left(\mathrm{e}^x + 5\right) - \dfrac{5}{12}x^2 - x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

2. **a.** Voir la figure plus haut.

   b. L'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ est égale à l'intégrale entre 0 et 2 de la fonction h.

   $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x = [H(x)]_0^2 = H(2) - H(0) = 6\ln\left(\mathrm{e}^2 + 5\right) - \dfrac{5}{12}2^2 - 2 + C - \left[6\ln\left(\mathrm{e}^0 + 5\right) - \dfrac{5}{12}0^2 - 0 + C\right] = 6\ln\left(\mathrm{e}^2 + 5\right) - \dfrac{5}{3} - 2 - 6\ln 6 = 6\ln\left(\mathrm{e}^2 + 5\right) - 6\ln 6 - \dfrac{11}{3} = 6\left[\ln\left(\mathrm{e}^2 + 5\right) - \ln 6\right] - \dfrac{11}{3} = 6\ln\left[\dfrac{\mathrm{e}^2 + 5}{6}\right] - \dfrac{11}{3} \approx 0,68$ (unité d'aire)