Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Antilles–Guyane juin 2010

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z suivantes :
   a. $z^2 = -1$;
   b. $z^2 - 4z + 13 = 0$;
   c. $z - 3i = -2iz + 4$.
2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_A = i,\ z_B = 2 + 3i \quad \text{et} \quad z_C = \frac{4 + 3i}{1 + 2i}.$$

   a. Placer les points A et B dans le repère $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   b. Calculer la distance AB.
   c. Montrer que $z_C = 2 - i$.
3. **a.** Calculer le module et un argument de $z_C - z_A$.
   b. En déduire l'écriture exponentielle de $z_C - z_A$.
   c. Déterminer géométriquement l'ensemble E des points M d'affixe z du plan qui vérifient $|z - z_A| = 2\sqrt{2}$.
   d. Justifier que les points B et C appartiennent à l'ensemble E puis tracer cet ensemble dans le plan.

EXERCICE 2 **5 points**

Un concessionnaire propose à ses clients, au moment d'acheter un véhicule neuf, d'équiper celui-ci avec des options :
- La peinture métallique (option A) pour un coût de 500 euros
- La climatisation (option B) pour un coût de 1 000 euros
- Un système GPS embarqué (option C) pour un coût de 1 500 euros

Le client est libre de choisir zéro, une ou plusieurs options parmi les trois proposées.

1. Déterminer le nombre de combinaisons d'options qu'il est possible de faire.
2. N'ayant aucune information sur le choix des clients, le concessionnaire suppose les combinaisons d'options équiprobables.
   a. Calculer la probabilité qu'un client équipe son véhicule en choisissant au moins une option.

b. Calculer la probabilité qu'un client équipe son véhicule en choisissant au moins l'option B.

3. On note X la variable aléatoire associée au coût total (en euros) des options que peut choisir un client qui achète un véhicule chez ce concessionnaire.

a. Recopier puis compléter le tableau suivant :

k	0	500	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000
$p(X=k)$							

b. Calculer la probabilité qu'un client achète pour plus de 1 500 euros d'options.

c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X, qui représente le coût moyen (en euros) d'une combinaison d'options pour un véhicule.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Le concessionnaire propose la promotion : « l'option C au prix de l'option B ».
Calculer le pourcentage de baisse de son chiffre d'affaire moyen sur la vente des combinaisons d'options pour un véhicule.
(Comme à la question 2., on supposera les combinaisons d'options équiprobables.)

PROBLÈME **10 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} + 2x.$$

1. Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$h(x) = 1 - \ln x + 2x^2.$$

a. On note h' la fonction dérivée de h.
Montrer que $h'(x) = \dfrac{4x^2-1}{x}$ puis déterminer le signe de $h'(x)$ pour x dans $]0 ; +\infty[$.

b. Calculer $h\left(\dfrac{1}{2}\right)$ puis dresser le tableau de variations de h.
On ne déterminera pas les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

c. En déduire le signe de $h(x)$ pour x dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. a. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0 x>0} f(x)$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

c. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ puis dresser le tableau de variations de f.

3. a. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.

b. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.

4. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$, et les droites $\mathscr{T}$ et Δ dans le repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

6. Soit G la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $G(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

a. Démontrer que G est une primitive de la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

b. Hachurer la partie du plan délimitée par les droites d'équation $x = 1$, $x = \text{e}$, la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.

c. Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire de cette partie hachurée.