Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Antilles-Guyane 13 septembre 2012
Génie mécanique (options A et F), Génie civil, Génie énergétique

Dans tout le sujet, on désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Exercice 1 — 6 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. On donne $P(z) = z^3 - 6z^2 + 18z - 27$ où z est un nombre complexe.
   - **a.** Calculer $P(3)$.
     Déterminer les nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z-3)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   - **b.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 - 3z + 9 = 0$ puis en déduire les solutions de $P(z) = 0$.
2. On considère les points A, B et F d'affixes respectives

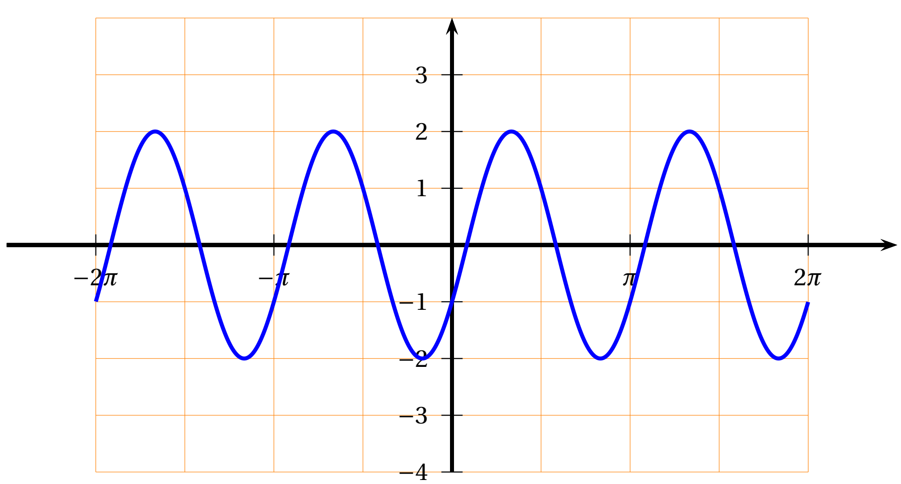
$$z_{\text{A}} = 3, \quad z_{\text{B}} = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{F}} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}.$$

   - **a.** Donner la forme trigonométrique des nombres complexes z_{A}, z_{B} et z_{F}.
   - **b.** Justifier que les points A, B et F sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   - **c.** Placer les points A, B et F dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
   - **d.** Calculer les distances AB et AF ; quelle est la nature du quadrilatère OBAF ?

Exercice 2 — 4 points

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\pi\,;\,2\pi]$ par

$$f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$



1. **a.** Par lecture graphique, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$ dans l'intervalle $[-2\pi~;~2\pi]$.

   b. Résoudre l'équation $f(x) = 2$ sur l'intervalle $[0~;~\pi]$.

2. On note (E) l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$, où y est une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et y'' sa fonction dérivée seconde.

   a. Résoudre l'équation (E).

   b. Déterminer la solution particulière g de (E) qui vérifie $g(0) = -1$ et $g'(0) = 2\sqrt{3}$ où g' désigne la fonction dérivée de g.

   c. Comparer $f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in [-2\pi~;~2\pi]$.
   On rappelle que pour tous réels a et b, on a : $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

   Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera en prise en compte dans la notation.

PROBLÈME **10 points**

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{6\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 5}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

PARTIE A : Étude de la fonction f

1. On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout réel x on a $f'(x) = \dfrac{30\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 5)^2}$ puis étudier le signe de $f'(x)$ pour x dans $\mathbb{R}$.

2. **a.** Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x) = \dfrac{6}{1 + 5\mathrm{e}^{-x}}$.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$ et en déduire l'existence de deux asymptotes Δ_1 et Δ_2 à la courbe $\mathscr{C}$. On précisera une équation de chacune de ces asymptotes.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse 0 est $y = \dfrac{5}{6}x + 1$.

5. Dans le repère, tracer la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que les droites $\mathscr{T}$, Δ_1 et Δ_2 sur une feuille de papier millimétré.

PARTIE B : Résolution d'une équation

1. Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une solution unique x_0 sur l'intervalle $[1 ; 5]$.
2. Graphiquement, donner un encadrement de x_0 à l'unité près, et placer x_0 sur le graphique.
3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la valeur décimale arrondie au centième de x_0.

PARTIE C : Un calcul d'aire

1. **a.** Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + 5\right)$$

   est une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 5}$.

b. En déduire une primitive H de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par
$h(x) = \dfrac{6\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 5} - \left(\dfrac{5}{6}x + 1\right)$.

2. a. Hachurer sur le graphique, le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f, la tangente $\mathscr{T}$ ainsi que les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.

b. On admet que la fonction h est positive sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.

Montrer que la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire $\mathscr{A}$ de ce domaine est $\mathscr{A} = 6\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^2 + 5}{6}\right) - \dfrac{11}{3}$.