Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Nouvelle-Calédonie novembre 2010
Génie mécanique - Génie énergétique - Génie civil

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 + \left(2\sqrt{3} - 2\right) z^2 + \left(4 - 4\sqrt{3}\right) z - 8$.

1. Résolution de l'équation $P(z) = 0$
   a. Calculer $P(2)$.
   b. Déterminer les deux nombres réels α et β tels que, pour tout nombre complexe z :
   $$P(z) = (z-2)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right).$$
   c. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.
2. On considère les points A, B, C, d'affixes respectives :
   $a = 2,\ b = -\sqrt{3} + \text{i},\ c = -\sqrt{3} - \text{i}$.
   a. Déterminer le module et un argument des nombres complexes b et c.
   b. En déduire que les points A, B, et C appartiennent à un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.
   c. Placer les points A, B, C dans le repère $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ et tracer le cercle $\mathscr{C}$.
   d. Démontrer que le triangle OBC est équilatéral.
   e. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

EXERCICE 2 **5 points**

On dispose d'un échantillon d'os fossile contenant initialement une masse de 10 grammes de carbone 14. Le but de l'exercice est d'étudier l'évolution de cette masse au fil des siècles, par deux méthodes différentes.

Partie A : Première méthode

On considère que la masse de carbone 14 dans un tel échantillon diminue à raison de 1,2 % par siècle.

1. Quelle masse de carbone 14 contiendra l'échantillon :
   a. un siècle plus tard ?
   b. deux siècles plus tard ?
2. On note M_n la masse de carbone 14 contenue dans l'échantillon au bout de n siècles, où n est un entier naturel.
   a. Démontrer que la suite (M_n) est une suite géométrique de raison $0{,}988$.
   b. Exprimer M_n en fonction de n.
3. Déterminer au bout de combien de siècles, la masse de carbone 14 contenue dans l'échantillon sera inférieure à 5 g.

Partie B : Seconde méthode

On note $m(t)$ la masse en gramme de carbone 14 contenue dans l'échantillon à l'instant t (en siècle). On admet que la fonction m est solution de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad : \quad y' + 1,21 \cdot 10^{-2} y = 0.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (E), qui vérifie : $m(0) = 10$.
3. Déterminer au bout de combien de siècles, la masse de carbone 14 contenue dans l'échantillon sera inférieure à 5 grammes.

PROBLÈME **11 points**

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.
On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = x\text{e}^{-x} - 2x + 3.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$g(x) = \text{e}^{-x}(1 - x) - 2.$$

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$, puis en $+\infty$.
2. Étude des variations de la fonction g
   - **a.** Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.
   - **b.** Dresser le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
3. Étude du signe de la fonction g
   - **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.
     Démontrer que cette solution, notée α , appartient à l'intervalle $[-1 ; 0]$.
   - **b.** Donner la valeur approchée de α arrondie au centième.
   - **c.** Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ en fonction des valeurs de x.

Partie B : Étude de la fonction *f*

1. Étude des limites
   - **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   - **b.** En remarquant que, pour tout réel x, $f(x) = x\left(\text{e}^{-x} - 2\right) + 3$, déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Étude d'une asymptote
   - **a.** Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -2x + 3$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   - **b.** Étudier la position relative de la droite $\mathscr{D}$ et de la courbe $\mathscr{C}$.
3. Étude des variations de la fonction f
   - **a.** Vérifier que pour tout nombre réel x, $f'(x) = g(x)$ où g est la fonction définie dans la partie A et où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

b. En utilisant le signe de la fonction g, obtenu précédemment, dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. (On prendra : $f(\alpha) \approx 3,2$)

4. Construire la droite $\mathcal{D}$ puis la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie C : Calcul d'aire

1. On note H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = (-x-1)\text{e}^{-x}.$$

a. Calculer $H'(x)$ où H' désigne la fonction dérivée de la fonction H.

b. En déduire une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$. On donnera une valeur exacte de $\mathcal{A}$ puis la valeur arrondie au mm^2.