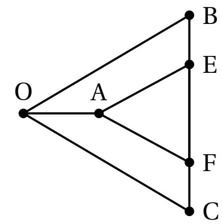
Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique, civil 21 juin 2012 Métropole

EXERCICE 1 **6 points**



On considère le puzzle représenté ci-contre. Il est constitué de 3 pièces : le triangle AEF et les quadrilatères AEBO et AFCO, découpés dans le triangle OBC.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm, fourni en annexe 1. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue complexe z :

$$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2. On considère les points B et C d'affixes respectives $z_{\text{B}} = 4\sqrt{3} + 4\text{i}$ et $z_{\text{C}} = 4\sqrt{3} - \text{i}$.
   a. Vérifier que $z_{\text{B}} = 8\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$.
   b. En déduire une écriture exponentielle du nombre complexe z_{C}.
   c. Placer précisément les points B et C dans le repère défini précédemment.
   d. Démontrer que le triangle OBC est équilatéral.
3. Le point A a pour coordonnées $(3\,;\,0)$. Le point D a pour coordonnées $\left(4\sqrt{3}\,;\,0\right)$.
   a. Écrire les affixes des points z_{A} et z_{D} des points A et D.
   b. Calculer les affixes du point E milieu du segment [BD] et du point F milieu du segment [CD].
   c. Placer les points A, D, E et F dans le repère figurant en annexe 1.
   d. Calculer l'aire exacte, en cm^2, du triangle AEF.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche même si elle est incomplète, toute prise d'initiative, même si elle n'aboutit pas, sera prise en compte.*
   Quelles sont les valeurs exactes, en cm^2, des aires des deux autres pièces du puzzle ?

EXERCICE 2 **5 points**

Un puzzle est constitué de trois pièces : un triangle et deux quadrilatères.
Un forain propose le jeu suivant utilisant six boîtes :
Trois boîtes parmi les six contiennent une et une seule pièce de ce puzzle, les autres restant vides.
Une partie consiste :
— à placer les six boîtes au hasard sur un plateau ;
— à demander au joueur de choisir une boîte parmi les six.
Le jeu nécessite une mise de 2 euros. Il consiste à ouvrir une boîte au hasard parmi les six.
— Si le joueur trouve la pièce triangulaire on lui remet 5 euros : son gain relatif est alors de 3 euros.
— Si le joueur trouve une autre pièce on lui remet 3 euros.
— Si la boîte est vide on ne lui remet rien.

1. On considère la variable aléatoire X qui prend comme valeurs les gains relatifs du jeu précédent, c'est-à-dire la somme reçue (éventuellement nulle) moins la mise de 2 euros.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X. 1

c. Montrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $-\dfrac{1}{6}$. Interpréter le résultat obtenu.

d. Le forain paie 45 euros par jour pour la location de son emplacement. Trouver le nombre minimum de parties qu'il doit organiser chaque jour en moyenne pour espérer ne pas perdre d'argent.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche même si elle est incomplète, toute prise d'initiative, même si elle n'aboutit pas, sera prise en compte.*

Un joueur prétend qu'il peut modéliser ce jeu à l'aide d'un dé cubique équilibré. Proposer un modèle correspondant à son affirmation.

PROBLÈME — 9 points

Partie A

Vérifier que la fonction g définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;3]$, par

$$g(x) = 2\mathrm{e}^{-0,1x}$$

est solution de l'équation différentielle $y' + 0,1y = 0$ où y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x, dérivable sur $[0\,;3]$.

On a tracé $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ orthonormal d'unité graphique 2 cm donné en annexe (2).

Partie B

On considère la fonction f définie, pour tout nombre x réel de l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$, par

$$f(x) = 2\ln(\mathrm{e} + x),$$

où e est le nombre réel tel que $ln(\mathrm{e}) = 1$.

1. **a.** Montrer, en détaillant les calculs, que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$, la dérivée f' de la fonction f est définie par

$$f'(x) = \frac{2}{\mathrm{e} + x}.$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$.

2. Établir, par la méthode de votre choix, que le nombre réel $1 - \mathrm{e}$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$.

3. Dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on a placé le point $\mathrm{A}(-\mathrm{e}\ ;\ 0)$.

a. Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de la fonction f en B, son point d'abscisse 0.

b. Vérifier que le point A appartient à $\mathcal{T}$.

c. Tracer précisément $\mathcal{T}$.

d. On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[1 - \mathrm{e}\ ;\ 0]$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ orthonormal d'unité graphique 2 cm donné en annexe 2. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

Partie C

Hachurer la partie P du plan limitée par la réunion des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 3$.
Représenter sur votre copie l'allure du solide S engendré par la rotation de la partie hachurée P autour de l'axe des abscisses.

Partie D

On rappelle que le volume V du solide engendré par la rotation autour de l'axe (Ox) de la partie du plan limitée par la courbe représentative d'une fonction h, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ ($a < b$) est

$$V = \pi \int_a^b (h(x))^2\,\mathrm{d}x \quad \text{unités de volume.}$$

1. Soit :

$$I = \int_{1-\mathrm{e}}^{0} (f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

On admet que $I = 4\mathrm{e} - 8$. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de I.

2. a. Vérifier que la fonction H définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;3]$, par

$$H : x \longmapsto H(x) = -20\mathrm{e}^{-0,2x}$$

est une primitive de la fonction qui à tout réel x de l'intervalle $[0\,;3\mathrm{J}$ associe $(g(x))^2$.

b. On note

$$J = \int_0^3 (g(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $J = 20\left(1 - \mathrm{e}^{-0,6}\right)$.

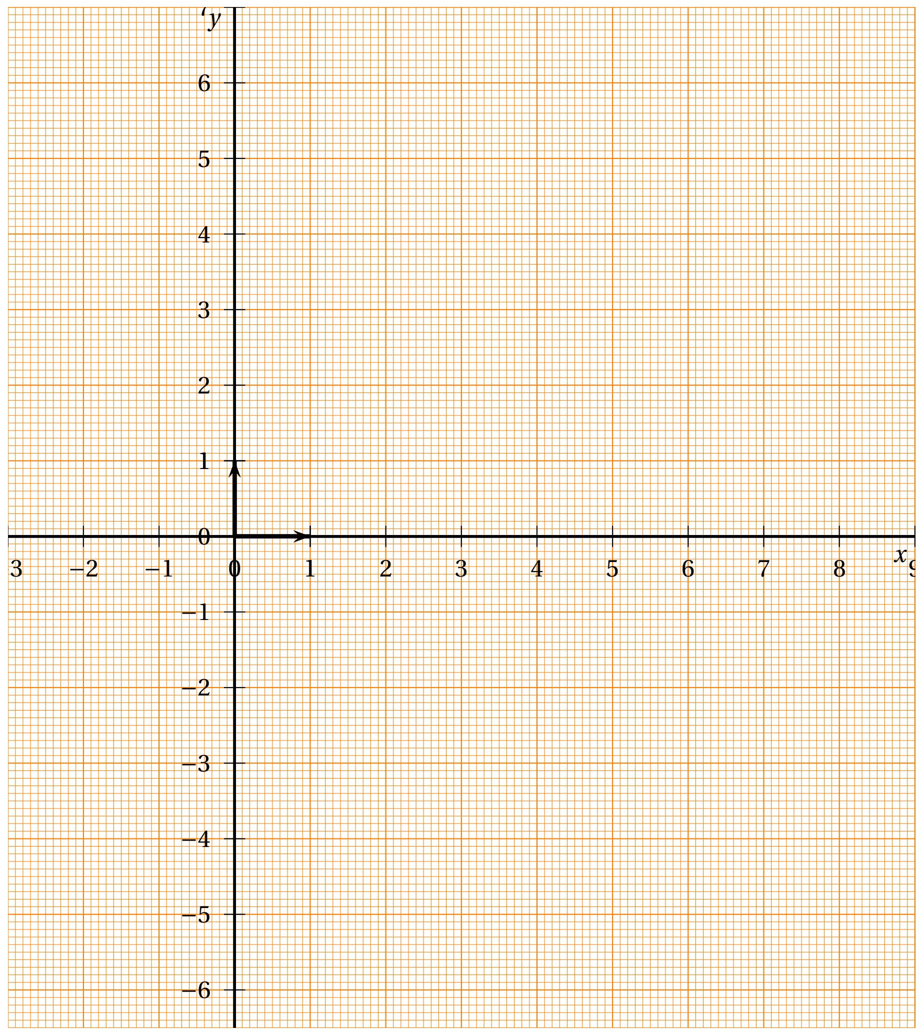
c. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de J.

3. *Cette question est à choix multiples (QCM). Une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point. Indiquer sur la copie la réponse choisie.*

Dans le tableau ci-dessous, parmi les quatre réponses proposées pour le volume en cm^3 du solide S, une seule est valable, laquelle ? Expliquer votre choix.

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
12	285	299	37

Annexe 1



Annexe 2