∽ Baccalauréat STI Métropole juin 2000 ∽
Génie mécanique, civil, Génie énergétique

Durée : 4 heures | Coefficient : 4

EXERCICE 1 **5 points**

1. i est le complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
   On considère les nombres complexes suivants :
   $$a = \sqrt{3} + \mathrm{i} \qquad b = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}.$$
   Déterminer le module et un argument de $a,\ b$ et $\dfrac{a}{b}$.
2. Soit $z = \cos\dfrac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{12}$. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ avec 4 cm comme unité graphique. On considère les points $M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$ d'affixes respectives $z,\ z^2,\ z^3,\ z^4$.
   a. Déterminer le module et un argument de $z,\ z^2,\ z^3,\ z^4$.
   b. En laissant vos traits de construction sur la copie, placer les points $M_1,\ M_2,\ M_3$ et M_4 dans le plan complexe.

EXERCICE 2 **4 points**

Un professeur organise un tournoi de football entre des équipes d'élèves de seconde et des équipes d'élèves de première. Voici les résultats des huit matchs joués le premier jour du tournoi.

	équipe de seconde	équipe de première
1er match	2 buts	1 but
2e match	2 buts	0 but
3e match	3 buts	3 buts
4e match	1 but	3 buts
5e match	0 but	1 but
6e match	0 but	0 but
7e match	1 but	4 buts
8e match	3 buts	2 buts

On choisit un match au hasard parmi les huit matchs du premier jour du tournoi ; tous les matchs ont la même probabilité d'être choisis

1. **a.** Montrer que la probabilité p_1 qu'aucun but n'ait été marqué au cours de ce match est égale à $\dfrac{1}{8}$.
   b. Quelle est la probabilité p_2 que le match soit nul (c'est-à-dire que chaque équipe ait marqué le même nombre de buts) ?
2. Pour chaque match, on calcule la différence entre les nombres de buts marqués par les deux équipes, de façon à trouver un nombre positif ou nul. On définit ainsi une variable aléatoire X. Par exemple, pour le 5e match, la valeur de X est égale à 1 et pour le 8e match, elle est aussi égale à 1.
   a. Donner les quatre valeurs possibles de X.
   b. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance mathématique de X.

PROBLÈME **11 points**

Dans tout le problème, le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x+2+\ln x}{x}.$$

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$est tracée à la dernière page (à compléter au fur et à mesure et à rendre avec la copie).

Partie I - étude de la fonction *f*

1. D'après le graphique, il semble que l'axe des ordonnées soit asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   Le prouver par le calcul.
2. **a.** Vérifier que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$.
   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   c. En déduire l'existence d'une asymptote D à la courbe $\mathscr{C}$. Donner son équation et la tracer sur la dernière page.
3. **a.** Prouver que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.
   b. Montrer que $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en e^{-1}.
   c. Établir le tableau de variations de f. Dans ce tableau, on donnera la valeur exacte du maximum de f.

Partie II - Position relative de deux courbes

1. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x+2}{x}$ et $\mathscr{H}$ la courbe représentative de g dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   a. Étudier rapidement la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$ (dérivée, limites, tableau de variations).
   b. Donner les équations des deux asymptotes de la courbe $\mathscr{H}$.
2. **a.** Calculer $f(x) - g(x)$ et étudier son signe.
   b. Montrer que les deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{H}$ se coupent en un point K d'abscisse 1.
   c. Étudier la position relative des deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{H}$.
3. Placer le point K et construire la courbe $\mathscr{H}$ sur la dernière page.

Partie III - Calcul d'une aire

Soit α un réel tel que $\alpha > 1$.
On note $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire du domaine limité par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{H}$ et par les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.

1. Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $u'(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$. Vérifier que u est une primitive de $\dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Calculer $\mathscr{A}(\alpha)$ en cm^2.
3. En remarquant que $\ln \alpha$ est strictement positif, calculer α pour que $\mathscr{A}(\alpha) = 8\ \text{cm}^2$. Hachurer l'aire correspondante sur le graphique (dernière page) à rendre avec la copie.

Document à rendre avec la copie

Courbe représentative de la fonction f