Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole juin 2006 ∾

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **5 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les nombres complexes suivants :

$$z_{\text{A}} = \sqrt{2} + \text{i}\sqrt{6}, \qquad z_{\text{B}} = 2 - 2\text{i}.$$

On pose $z = \dfrac{z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}}$.

1. Écrire z sous forme algébrique.
2. **a.** Calculer le module et un argument de z_{A} et de z_{B}.
   b. En déduire le module et un argument de z.
   c. Écrire z sous forme trigonométrique.
3. Déduire des résultats obtenus aux questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{7\pi}{12}$
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
   a. Sur papier millimétré, construire les points A et B, images respectives de z_{A} et de z_{B}.
   b. Déterminer la nature du triangle OAB.

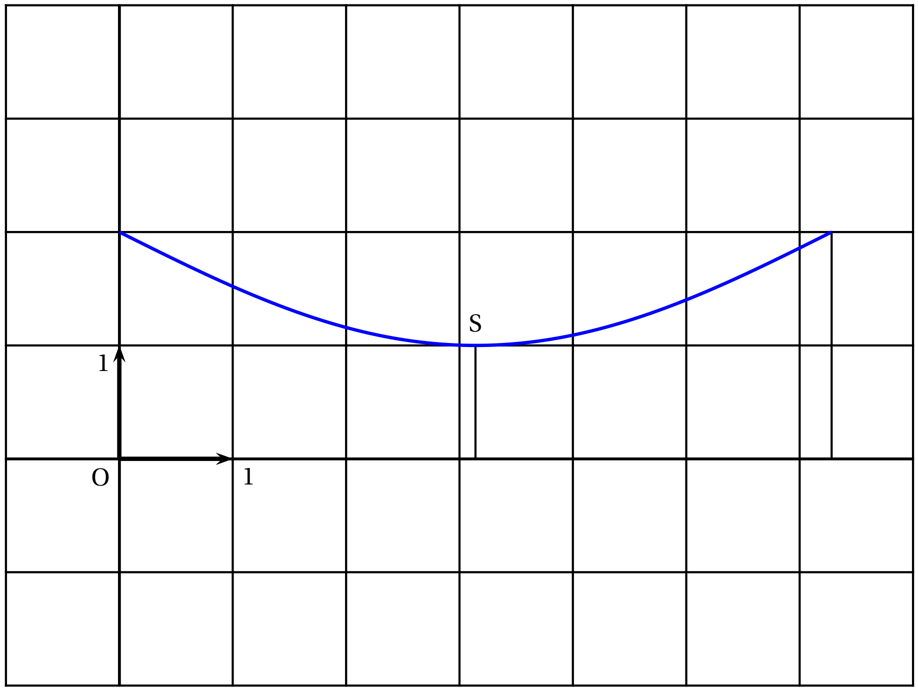
EXERCICE 2 **4 points**

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}$, dans un repère orthonormal d'unité 2 cm, de la fonction f définie sur $[0\,;\,2\pi]$ par :

$$f(x) = 2 - \sin\frac{x}{2}$$

1. Vérifier, par le calcul, que :
   a. la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $\text{S}(\pi\,;\,1)$.
   b. la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point S est parallèle à l'axe des abscisses.
   c. la fonction f est solution de l'équation différentielle : $4y'' + y - 2 = 0$.
2. On veut calculer la valeur exacte du volume du solide de révolution engendré par la courbe $\mathscr{C}$ lors de sa rotation autour de l'axe des abscisses. On rappelle que la valeur V de ce volume, en unités de volume, est donnée par la formule :

$$\text{V} = \pi\int_0^{2\pi} [f(x)]^2\,\text{d}x.$$



a. On pose, pour tout nombre réel x appartenant à $[0\ ;\ 2\pi]$, $g(x) = [f(x)]^2$. Démontrer que l'on a : $g(x) = \frac{9}{2} - 4\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos x$.

b. Donner la valeur exacte de ce volume en cm^3, puis sa valeur arrondie au mm^3 près.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unités graphiques 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. **a.** En remarquant que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$

$$f(x) = \frac{1}{1+x}[2x - (1+x)\ln(1+x)],$$

calculer la limite de f en -1 (on pourra utiliser sans démonstration $\lim\limits_{X\to 0} X\ln X = 0$).

b. En déduire une équation d'une droite $\mathscr{D}$ asymptote à $\mathscr{C}$.

3. Déterminer la dérivée f' de f et montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2}$. (1 + x)

4. **a.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$.
   b. Calculer la valeur exacte de $f(1)$.
   c. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$.

Partie B

1. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
2. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution α dans l'intervalle $[1~;5]$.
   Démontrer que $\ln(1+\alpha) = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha}$.
   b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0~;~\alpha]$.
4. Tracer, dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, la tangente $\mathcal{T}$, la droite $\mathcal{D}$ puis la courbe $\mathcal{C}$.

Partie C

1. Démontrer que, sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$, la fonction F définie par

$$F(x) = (-3-x)\ln(1+x)+3x$$

   est une primitive de la fonction f.
2. Soit $\mathcal{H}$ la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.
   a. Hachurer la partie $\mathcal{H}$ sur le dessin.
   b. Calculer, en unités d'aire et en fonction de α, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie $\mathcal{H}$ et démontrer que $\mathcal{A}(\alpha) = 2\left(\dfrac{\alpha^2-3\alpha}{1+\alpha}\right)$ cm^2.