Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole 17 juin 2008

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **5 points**

On considère les nombres complexes

$$z_{\text{A}} = 4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}, \quad z_{\text{B}} = 4\text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z_{\text{C}} = -2+2\text{i}.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal.
Les parties I et II sont indépendantes

Partie I : Q. C. M.
Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B, C ou D est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
On ne demande aucune justification
NOTATION : *chaque réponse juste rapporte* $0,5$ *point ; une réponse fausse enlève* $0,25$ *point.*
Une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Si le total des points est négatif, il est ramené à 0.

1. Le nombre complexe $Z_1 = z_{\text{A}}z_{\text{B}}$ est :

Réponse A : un nombre réel positif
Réponse B : un nombre réel négatif
Réponse C : un nombre imaginaire pur
Réponse D : l'affixe d'un point du plan complexe pris hors des axes

2. Le nombre complexe $Z_2 = z_{\text{A}}^6$ est :

Réponse A : un nombre réel positif
Réponse B : un nombre réel négatif
Réponse C : un nombre imaginaire pur
Réponse D : l'affixe d'un point du plan complexe pris hors des axes

3. Le nombre complexe conjugué de z_{A} est :

Réponse A : $-4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$
Réponse B : $4\text{e}^{\text{i}\frac{7\pi}{6}}$
Réponse C : $4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$
Réponse D : $\frac{1}{4}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$

4. Le nombre complexe z_{C} peut se mettre sous la forme :

Réponse A : $2\sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$
Réponse B : $2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$
Réponse C : $2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{4}}$
Réponse D : $4\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$

Partie II
On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_{A}, z_{B} et z_{C}.

1. Soit M un point du plan d'affixe z.
   - **a.** Interpréter géométriquement $|z - z_{\text{A}}|$.
   - **b.** Quel est l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie l'égalité : $|z - z_{\text{A}}| = |z - z_{\text{B}}|$.
   - **c.** Vérifier que le point C appartient à l'ensemble $\mathcal{D}$.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.
3. Déduire des questions 1. et 2. la nature du triangle ABC.

EXERCICE 2 — 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ par

$$f(x) = \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + 1.$$

1. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.
   b. En utilisant la relation $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$, montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, $f'(x) = -\sin(x)[1 + 2\cos(x)]$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, l'équation produit : $\sin(x)[1 + 2\cos(x)] = 0$.
3. **a.** En s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction dérivée f' donnée en annexe, dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.
   b. Déduire des questions 2. et 3. a. le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.
   Préciser les ordonnées des points dont l'abscisse x vérifie $f'(x) = 0$.
4. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ dans le repère de l'annexe (où f' est déjà représentée).

PROBLÈME — 10 points

On considère la fonction f, définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \text{e}^{2x} - 5\text{e}^{x} + 4.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités : 2 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée).

Partie A: limites aux bornes de l'ensemble de définition

1. Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 4$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.
2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = (\text{e}^{x} - 1)(\text{e}^{x} - 4)$.
   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Partie B : intersection de la courbe ($\mathscr{C}$) avec l'axe des abscisses

En utilisant la forme factorisée de $f(x)$ donnée dans la partie A. 2. a., déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe ($\mathscr{C}$) avec l'axe des abscisses.

Partie C : étude des variations de la fonction f

1. **a.** Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

2. Montrer en **détaillant vos calculs** que $f\left(\ln \dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{9}{4}$.

3. Déduire des questions précédentes le tableau de variations complet de la fonction f.

4. À l'aide du tableau de variations et du résultat acquis à la partie B, donner le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Tracer la droite ($\mathscr{D}$) puis la courbe ($\mathscr{C}$), pour x appartenant à l'intervalle $[-4 ; 2]$, dans le repère défini en début de problème.

Partie D : calcul d'une aire

1. Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** Déterminer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe ($\mathscr{C}$), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 4$.

   b. Donner une valeur approchée au mm^2 près de cette aire.

ANNEXE à l'exercice 2

(à compléter et à rendre avec la copie)

La courbe préconstruite ci-dessous est la représentation graphique de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.