Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie civil Métropole 16 septembre 2010 ∾

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée pour cette épreuve.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Soit le polynôme P défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^3 - 27.$$

a. Calculer $P(3)$; en déduire une factorisation de $P(z)$.

b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + 3z + 9 = 0.$$

c. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de $P(z) = 0$.

2. Soient M_1, M_2 et M_3 les points d'affixes respectives :

$$z_1 = 3, \quad z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i} \quad \text{et} \quad z_3 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}.$$

a. On propose dans le tableau ci-dessous trois écritures sous forme exponentielle des nombres complexes z_2 et z_3.

Écriture 1	Écriture 2	Écriture 3
$z_2 = 3\text{e}^{\frac{\pi}{6}\text{i}}$ et $z_3 = 3\text{e}^{-\frac{\pi}{6}\text{i}}$	$z_2 = 3\text{e}^{-\frac{2\pi}{3}\text{i}}$ et $z_3 = 3\text{e}^{\frac{2\pi}{3}\text{i}}$	$z_2 = 3\text{e}^{\frac{2\pi}{3}\text{i}}$ et $z_3 = 3\text{e}^{-\frac{2\pi}{3}\text{i}}$

Déterminer celle qui convient en justifiant votre réponse.

b. Placer de façon précise les points M_1, M_2 et M_3 dans le repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ défini précédemment. (*On laissera apparents les traits de construction.*)

c. Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant votre choix à chaque proposition suivante :
Proposition 1 : Les distances M_1M_2 et M_1M_3 sont différentes.
Proposition 2 : L'aire du triangle $\text{M}_1\text{M}_2\text{M}_1$ est $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

EXERCICE 2 **6 points**

Une entreprise fabrique des pots de peinture cylindriques en fer, dont l'étanchéité est assurée par un joint de caoutchouc. Tous les jours, le chef d'équipe prélève un échantillon au hasard dans la production, contrôle les dimensions de chaque pot et l'épaisseur du caoutchouc.

Partie A - Échantillon du lundi

Ce lundi, le chef d'équipe prélève 250 pots au hasard. Il les contrôle tous et il constate que :

- 232 pots ne présentent pas de défaut ;
- 5 pots présentent au moins un défaut de dimension ;
- 2 pots exactement présentent à la fois un défaut de dimension et un défaut d'épaisseur de caoutchouc.

1. Compléter sur l'annexe (à rendre avec la copie), le tableau d'effectifs suivant :

Tableau du lundi	Pièces présentant un défaut de dimension	Pièces ne présentant pas de défaut de dimension	Total
Pièces présentant un défaut d'épaisseur de caoutchouc			
Pièces ne présentant pas de défaut d'épaisseur de caoutchouc			
Total	5		250

2. En déduire le pourcentage de pièces dans l'échantillon du lundi ne présentant pas de défaut d'épaisseur de caoutchouc.

Partie B - Échantillon du mardi

Le lendemain mardi, le chef d'équipe prélève 200 pots au hasard dans la production et il les contrôle tous ; la répartition des pièces suivant les défauts est donnée dans le tableau ci-dessous :

Tableau du mardi	Pièces présentant un défaut de dimension	Pièces ne présentant pas de défaut de dimension	Total
Pièces présentant un défaut d'épaisseur de caoutchouc	1	10	11
Pièces ne présentant pas de défaut d'épaisseur de caoutchouc	2	187	
Total	3	197	200

On admet que cette répartition reflète l'ensemble de la production de ce mardi, et que chaque pot a la même probabilité d'être prélevé. On prélève au hasard un pot de peinture produit ce jour, et on considère les événements suivants :

D : « le pot prélevé présente un défaut de dimension » ;

E : « le pot prélevé ne présente pas de défaut d'épaisseur de caoutchouc ».

1. **a.** Calculer la probabilité de chacun des événements D et E.

b. Définir en une phrase chacun des événements $D \cap E$ et $D \cup E$, puis calculer sa probabilité.

On admet désormais que cette répartition du mardi reflète parfaitement l'ensemble de la production journalière.

Sachant que :

— tout pot avec le seul défaut d'épaisseur de caoutchouc est réparé avec un surcoût de 0,15 euro,

— tout pot avec un défaut de dimension est invendable,

le tableau ci-dessous récapitule le coût de production et le prix de vente des pots suivant les défauts constatés :

	Pot sans défaut	Pot avec le seul défaut d'épaisseur de caoutchouc	Pot avec un défaut de dimension (au moins)
Coût de production	1,30 euros	1,45 euros (car 0,15 euro de surcoût pour corriger le défaut)	1,30 euros
Prix de vente	1,50 euros	1,50 euros	0 euro (invendable)

On note X la variable aléatoire associant à chaque pot, le gain net en euros (différence entre le prix de vente et le coût de production) réalisé par l'entreprise lors de sa vente.

2. **a.** Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

   b. Vérifier que la probabilité pour que le gain net soit égal à 0,05 euro est :

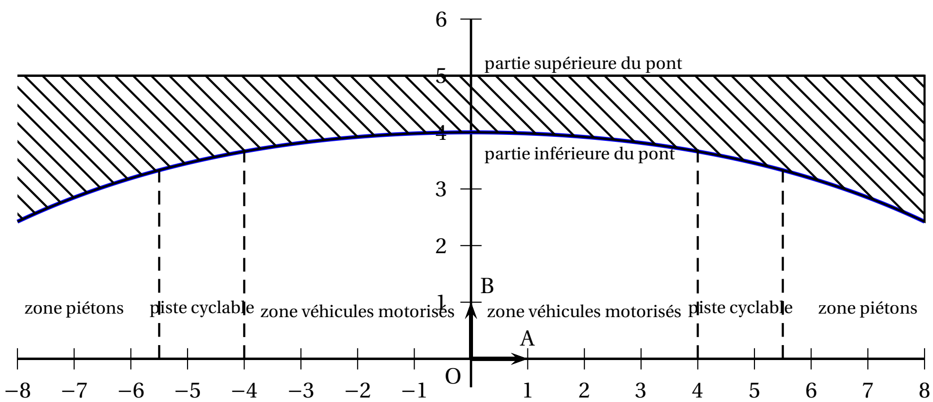
$$p(X = 0,05) = \frac{1}{20}$$

   c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   d. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ; interpréter le résultat obtenu.

PROBLÈME **9 points**

Un pont à une seule arche d'une longueur de 16 mètres, enjambe une route à double circulation. Dans un repère orthonormé, la figure ci-dessous représente à l'échelle 1/100 une vue de l'une des deux façades de ce pont.
La partie supérieure du pont est à une hauteur de 5 mètres au dessus de la route.
La partie de l'axe des abscisses comprises entre -8 et $+8$ représente la chaussée sur laquelle sont délimitées les zones de circulation des piétons, des cyclistes et des véhicules motorisés.



Partie 1 - Étude de la fonction *f* représentée par la courbe $\mathscr{C}$

Soit la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-8 ; 8]$ par :

$$f(x) = a - \frac{\mathrm{e}^{0,2x} + \mathrm{e}^{-0,2x}}{2}$$

où a désigne un nombre entier naturel.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative donnée ci-dessus dans le repère orthonormé (O, A, B).

1. Déterminer graphiquement $f(0)$. En déduire que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-8 ; 8]$,

$$f(x) = 5 - \frac{\mathrm{e}^{0,2x} + \mathrm{e}^{-0,2x}}{2}$$

2. Comparer $f(-x)$ et $f(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-8 ; 8]$.
   Que peut-on en déduire graphiquement ?
3. Montrer que la fonction f', fonction dérivée de la fonction f, est définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-8 ; 8]$ par :

$$f'(x) = \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-0,2x}\left(1 - \mathrm{e}^{0,4x}\right).$$

4. Calculer $f'(0)$. En déduire une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.
5. Résoudre algébriquement, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-8 ; 8]$, l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

6. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-8 ; 8]$.
7. Reproduire et compléter avec une précision de 10^{-2} par défaut le tableau suivant :

x	4	5,5	8
$f(x)$			

En déduire la hauteur maximale d'un véhicule motorisé pour qu'il puisse passer sous ce pont en tenant compte du fait que l'on doit laisser une hauteur de sécurité de 50 cm au dessus du véhicule.

Partie 2 - Calcul d'aire

On veut peindre les deux façades de l'armature du pont à arche. On appelle $\mathcal{A}$ l' aire de la partie hachurée sur la figure donnée au début du problème.

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-8}^{8} \left(e^{0,2x} + e^{-0,2x}\right)\,dx$.
2. Calculer $\mathcal{A}$ l'aire (exprimée en m^2) de la partie hachurée sur la figure donnée au début du problème.
3. En déduire que l'aire de la surface totale à peindre est égale à $10\left(e^{1,6} - e^{-1,6}\right)\ m^2$, soit environ $47,52\ m^2$.
4. La peinture utilisée pour peindre les façades du pont est vendue par bidon de 30 litres. Sachant que cette peinture a une propriété de recouvrement de 0,3 mètre carré par litre, combien de bidons sont nécessaires pour recouvrir les deux faces de cette construction ?

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 2

Tableau du lundi	Pièces présentant un défaut de dimension	Pièces ne présentant pas de défaut de dimension	Total
Pièces présentant un défaut d'épaisseur de caoutchouc			
Pièces ne présentant pas de défaut d'épaisseur de caoutchouc			
Total	5		250