Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Métropole 14 septembre 2012
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2+2z\sqrt{3}+4=0.$$

2. On considère les points A et B du plan d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}}=-\sqrt{3}+\text{i},\quad z_{\text{B}}=\overline{z_{\text{A}}}=-\sqrt{3}-\text{i}.$$

a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_{A} et z_{B}.

b. Écrire z_{A} sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$, où r est un réel strictement positif et θ un réel de l'intervalle $]-\pi~;~\pi]$.

c. Placer les points A et B dans le plan muni du repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$. (La figure sera réalisée sur la copie.)

d. Démontrer que le triangle OAB est un triangle équilatéral.

3. On considère l'équation d'inconnue z :

$$2z-4\text{i}=\text{i}z+2.$$

a. Démontrer que le nombre complexe 2i est la seule solution de cette équation.

b. On note C le point d'affixe 2i. Placer le point C dans le plan muni du repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

c. Démontrer que le quadrilatère OBAC est un losange.

EXERCICE 2 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses est correcte. Une absence de réponse ou une réponse erronée n'ôte pas de point.
On notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la réponse choisie.

1. On considère l'équation différentielle

$$y''+4y=0,$$

où y représente une fonction de la variable t, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Une solution de l'équation différentielle est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $t\longmapsto \text{e}^{-2t}$;

b. $t\longmapsto \cos(4t)$;

c. $t\longmapsto \sin(4t)$;

d. $t\longmapsto \cos(2t)$.

2. (u_n) est la suite arithmétique dont le terme de rang 1 est $u_1 = 2$ et dont le terme de rang 3 est $u_3 = 8$.
   a. la raison de la suite arithmétique (u_n) est égale à 2 ;
   b. la raison de la suite arithmétique (u_n) est égale à 3 ;
   c. la raison de la suite arithmétique (u_n) est -2 ;
   d. la suite arithmétique n'a pas de raison.
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$. La fonction f' dérivée de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
   a. $f'(x) = \mathrm{e}^x$;
   b. $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^x$;
   c. $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$;
   d. $f'(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$.
4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\mathrm{e}^{1-x}$. La courbe représentative de f admet pour tangente au point d'abscisse 1 dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$:
   a. la droite d'équation $y = 1$;
   b. la droite d'équation $x = 1$;
   c. la droite d'équation $y = -3x + 6$;
   d. la droite d'équation $y = \dfrac{-6}{\mathrm{e}^2}x + \dfrac{9}{\mathrm{e}^2}$

PROBLÈME **11 points**

Une cible est constituée d'un carré de 10 cm de côté. La surface de la cible est partagée en quatre zones délimitées par deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

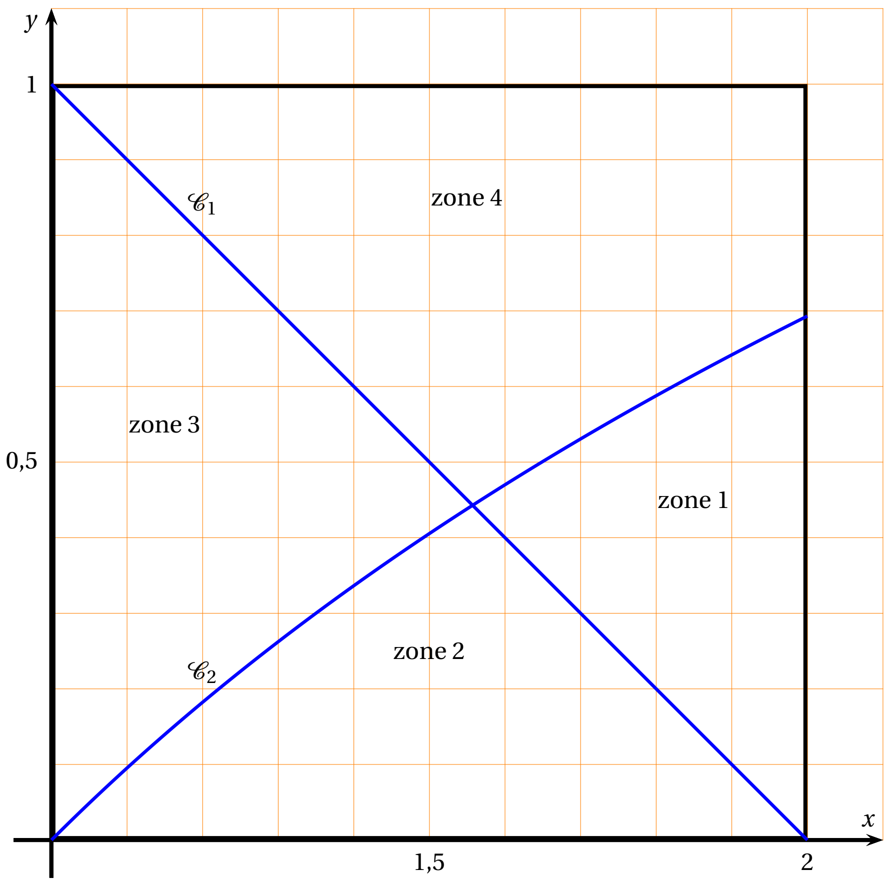
Partie A : Étude de fonction

On admet que les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentent, dans un repère orthonormé d'unité 10 cm, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ par

$$f(x) = \ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 2 - x.$$

1. Attribuer à chacune des fonctions f et g sa courbe représentative $\mathscr{C}_1$ ou $\mathscr{C}_2$, en justifiant votre choix.
2. Résoudre graphiquement, sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ avec la précision permise par le dessin, l'équation $f(x) = g(x)$.
3. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.
   a. Montrer que la fonction dérivée h' de la fonction h est définie sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ par $h'(x) = \dfrac{-x-1}{x}$.
   b. Déterminer le signe de $h'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,2]$. En déduire le tableau des variations de la fonction h.
   c. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;\,2]$. Donner une valeur approchée de α au centième près.
4. Donner le tableau de signe de la fonction h sur l'intervalle $[1\,;\,2]$, puis interpréter graphiquement le résultat.

Partie B : Calculs d'aires


y
1
0,5
$\mathscr{C}_1$
$\mathscr{C}_2$
zone 4
zone 3
zone 1
zone 2
x
1,5
2

1. L'objet de cette question est de déterminer l'aire de la zone 3 sur le dessin.
   a. Montrer que la fonction H définie sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ par
   $H(x) = 3x - \dfrac{x^2}{2} - x\ln(x)$ est une primitive de la fonction h.
   b. Montrer que :
   $$\int_1^{\alpha} h(x)\,\mathrm{d}x = 3\alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \alpha\ln(\alpha) - \frac{5}{2}.$$
   c. En déduire une valeur approchée au cm^2 près de l'aire $\mathscr{A}_3$ de la zone 3. On prendra 1,56 pour valeur approchée de α.
2. Déterminer une valeur approchée au cm^2 près de l'aire $\mathscr{A}_2$ de la zone 2.

Partie C : Probabilités

On admet dans cette question que les zones 1, 2, 3 et 4 ont pour aires respectives $\mathscr{A}_1 = 16$ cm^2, $\mathscr{A}_2 = 23$ cm^2, $\mathscr{A}_3 = 27$ cm^2 et $\mathscr{A}_4 = 34$ cm^2.
Un joueur inexpérimenté, après un grand nombre d'essais, estime que la probabilité que sa fléchette se plante dans la cible est $\dfrac{4}{5}$. Il estime aussi que la probabilité que sa flèche atteigne l'une des quatre zones est proportionnelle à l'aire de cette zone.

1. Quelle est la probabilité P_0 pour le tireur de ne pas atteindre la cible ?
2. Les probabilités P_1, P_2, P_3 et P_4 d'atteindre respectivement les zones 1, 2, 3 et 4 sont données dans le tableau ci-dessous.
   Vérifier qu'elles sont proportionnelles aux aires des zones $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3$ et $\mathscr{A}_4$.

P_1	P_2	P_3	P_4
0,128	0,184	0,216	0,272

3. Chaque lancer de fléchette rapporte un certain nombre de points selon la zone qui est atteinte :
   atteindre la zone 1 rapporte 10 points, la zone 2 rapporte 5 points, la zone 3 rapporte 2 points et la zone 4 rapporte 1 point.
   Ne pas atteindre la cible ne rapporte aucun point.
   On note X la variable aléatoire qui, à un lancer associe le nombre de points obtenus.
   a. Présenter la loi de X sous la forme d'un tableau.
   b. Déterminer la probabilité que X soit au plus égal à 2.
   c. Déterminer l'espérance de X.
   d. Estimer le nombre moyen de lancers que doit effectuer le lanceur pour espérer atteindre ou dépasser les 100 points.