Baccalauréat STI Nouvelle Calédonie décembre 2000
Génie énergétique, civil, mécanique

EXERCICE 1 **5 points**

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 4 boules rouges portant respectivement les numéros 0, 1, 2, 4 et l'urne U_2 contient 3 boules vertes portant respectivement les numéros 1, 3, 5.
On tire au hasard et simultanément une boule de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2.

- a désigne le numéro de la boule tirée de U_1 et b celui de la boule tirée de U_2.
- z est le nombre complexe dont la partie réelle est a et la partie imaginaire b. On suppose que les écritures algébriques $z = a + \mathrm{i}b$ possibles sont équiprobables.

Les probabilités demandées seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Dresser une liste de toutes les écritures algébriques possibles de z.
2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   a. E_1 : « $z = 1 + 3\mathrm{i}$ »,
   b. E_2 : « $z + \overline{z} = 2$ ».
3. On désigne par A l'évènement « le module de z est 5 », et par B l'évènement « z est un imaginaire pur ».
   a. Calculer la probabilité de l'évènement A puis celle de l'évènement B.
   b. Définir par une phrase l'évènement $A \cap B$. Calculer la probabilité de cet évènement.
   c. En déduire la probabilité de l'évènement $A \cup B$.
4. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe $a + b$.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de X.

EXERCICE 2 **5 points**

On appelle f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; unité graphique 10 cm.

1. Représenter la courbe $(\mathscr{C})$.
2. a. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   b. En déduire que la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est égale à e -2. Donner l'arrondi au centième de μ.

   On désigne par $(\mathscr{P})$ la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$, et par $(\mathscr{R})$ la partie du plan limitée par la droite d'équation $y = \mu$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
3. a. Représenter $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{R})$ en utilisant des hachures.
   b. Justifier le fait que $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{R})$ ont la même aire.

4. On désigne par V_1 le volume, exprimé en unités de volume, du solide engendré par la rotation de la partie $(\mathcal{P})$ autour de l'axe des abscisses et par V_2 celui du solide engendré par la rotation de la partie $(\mathcal{R})$ autour du même axe.

$$\text{(On rappelle que } V_1 = \pi \int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

On se propose de comparer V_1 et V_2.

a. Calculer la valeur exacte de V_1.

b. Calculer la valeur exacte de V_2.

c. Calculer la valeur exacte de $V_1 - V_2$ puis donner un arrondi au millième. Conclure.

PROBLÈME **10 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : détermination d'une fonction

On considère la fonction φ, définie sur l'intervalle $]-1\,;\ +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = a - (bx+1)\ln(x+1), \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

La courbe $\left(\mathcal{C}_\varphi\right)$ représentative de la fonction φ satisfait aux conditions suivantes :

- $\left(\mathcal{C}_\varphi\right)$ passe par le point A de coordonnées $(0\,;\,\mathrm{e})$,
- $\left(\mathcal{C}_\varphi\right)$ passe par le point B de coordonnées $(\mathrm{e}-1\,;\ 0)$.

1. Déterminer a puis b.

2. En déduire $\varphi(x)$.

Partie B : étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e} - (bx+1)\ln(x+1).$$

On désigne par $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sa courbe représentative.

1. **a.** Démontrer que la limite de f en -1 est égale à e. (On admettra que $\lim\limits_{X\to 0} X\ln X = 0$).

b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

2. **a.** Démontrer, en la résolvant, que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $]-1\,;\ +\infty[$.
Donner une valeur exacte puis la valeur décimale arrondie à 10^{-2} de α.

b. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]-1\,;\ +\infty[$.

c. Calculer la valeur exacte de $f(\alpha)$ et sa valeur décimale arrondie à 10^{-2}.

3. Dresser le tableau de variations de f.

4. **a.** Calculer les coefficients directeurs des tangentes (T_1) et (T_2) à la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ aux points d'abscisses respectives 0 et $\mathrm{e}-1$.

b. Tracer les tangentes (T_1) et (T_2) et la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ (unité graphique : 5 centimètres).

Partie C : calcul d'une aire

1. Soit G la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$G(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2[\ln(x+1)-1].$$

Vérifier que G est une primitive de la fonction qui, à x, associe $(x+1)\ln(x+1)$.
En déduire une primitive F de f.

2. On désigne par $(\mathcal{P})$ la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$.

a. Représenter $(\mathcal{P})$ sur la figure précédente en utilisant des hachures.

b. Calculer la valeur exacte de l'aire de la partie hachurée, en cm^2.
Donner sa valeur décimale arrondie à 10^{-2}.