Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Nouvelle-Calédonie 15 novembre 2012
Génie mécanique - Génie énergétique - Génie civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 4z + 8 = 0.$$

2. **a.** En prenant comme unité graphique 1 cm, représenter dans le plan les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 2 + 2\text{i}, \quad z_{\text{B}} = 2 - 2\text{i}, \quad \text{et } z_{\text{C}} = 4.$$

   b. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_{A} et z_{B}.

   c. Démontrer que le triangle AOB est rectangle isocèle.

   d. Démontrer que le quadrilatère OBCA est un carré.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit E le milieu du segment [OA] et D le point d'affixe $z_{\text{D}} = \text{i}z_{\text{A}}$.
   Démontrer que le point E est le milieu du segment [CD].

EXERCICE 2 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question, quatre réponses ou affirmations sont proposées, dont une seule est juste. Le candidat mentionnera le numéro de la question, et la lettre correspondant à la réponse juste. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point, l'absence de réponse ou une mauvaise réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Question 1

On considère l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$, où y désigne une fonction de variable réelle x deux fois dérivable.
Une solution de cette équation est la fonction f vérifiant, pour tout réel x :

Réponse A : $f(x) = 4\text{e}^{-4x}$ **Réponse B** : $f(x) = 4\text{e}^{2x}$
Réponse C : $f(x) = 10\cos(2x) - 10\sin(2x)$ **Réponse D** : $f(x) = 10\cos(4x) - 10\sin(4x)$

Question 2

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = (2x+1)\text{e}^{3x+1}$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Une expression de $f'(x)$ est :

Réponse A : $f'(x) = 2\text{e}^3$ **Réponse B** : $f'(x) = (6x+5)\text{e}^{3x+1}$
Réponse C : $f'(x) = 2\text{e}^{3x+1}$ **Réponse D** : $f'(x) = (2x+3)\text{e}^{3x+1}$

Question 3

Un jeu est basé sur une expérience aléatoire et il permet de gagner ou de perdre de l'argent. La variable aléatoire X qui représente ce gain (positif ou négatif) admet la loi de probabilité suivante.

Valeurs de X	-5	-2	0	1	6
Probabilité	$\dfrac{3}{25}$	$\dfrac{2}{25}$	$\dfrac{15}{25}$	$\dfrac{2}{25}$	$\dfrac{3}{25}$

On considère que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable X est strictement positive, équitable si elle est nulle, et défavorable au joueur si elle est strictement négative.

Réponse A : le jeu est défavorable au joueur **Réponse B** : le jeu est équitable
Réponse C : le jeu est favorable au joueur **Réponse D** : on ne peut pas savoir

Question 4

Soit C la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ;\ 1]$ par $g(x) = x^2 + 1$. On fait tourner cette courbe autour de l'axe des abscisses. Cela engendre un solide de révolution dont le volume V, exprimé en unité de volume, est :

$$V = \pi \int_0^1 [g(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

La valeur exacte de V est égale à :

Réponse A : $\dfrac{4\pi}{3}$ **Réponse B** : $\dfrac{6\pi}{5}$ **Réponse C** : 4π **Réponse D** : $\dfrac{28\pi}{15}$

Question 5

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]5 ;\ +\infty[$ dont la représentation graphique dans un repère du plan est notée C.
On suppose que $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = +\infty$. Ce résultat s'interprète ainsi :

Réponse A : la courbe C admet une asymptote d'équation $x = 5$.
Réponse B : lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe C admet une asymptote d'équation $y = 5$.
Réponse C : lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe C admet une asymptote oblique d'équation $y = 5x$.
Réponse D : la courbe C admet au point d'abscisse 5 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

PROBLÈME **10 points**

Partie A - Exploitation d'informations graphiques

On considère la fonction g définie pour tout réel x par :

$$g(x) = ax + b + \mathrm{e}^{-x},$$

où a et b sont deux nombres réels que l'on va déterminer dans cette partie.
On donne les renseignements graphiques suivants sur la courbe représentative de la fonction g dans un repère d'axes (Ox) et (Oy) :

— le point A de coordonnées $(0 ; 4)$ appartient à cette courbe représentative ;
— la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. À partir des renseignements précédents, donner la valeur de $g(0)$ ainsi que celle du nombre dérivé $g'(0)$.
2. Déterminer la valeur du nombre b en utilisant la question 1.
3. Pour tout réel x, calculer $g'(x)$ en fonction de a. En déduire la valeur du nombre a.

Partie B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x + 3 + \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   b. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.
2. **a.** Pour tout réel x, démontrer l'égalité : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1 + x\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{x}\right)$.

   b. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a. Pour tout réel x, démontrer que $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$, puis étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Représenter graphiquement la courbe $\mathscr{C}$ et son asymptote $\mathscr{D}$ dans le même repère. On prendra pour unité 1 cm sur chacun des axes.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Existe-il une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ qui est parallèle à l'asymptote $\mathscr{D}$?

Partie C - Calcul d'une aire plane

1. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Hachurer le domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$. On note $\mathscr{A}$ l'aire de ce domaine, exprimée en unité d'aire.
3. Calculer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$, puis donner sa valeur arrondie au mm^2.