Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Polynésie juin 2006 ∾
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8.$$

a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z-2)\left(z^2 - 2z + 4\right)$.

b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation
$P(z) = 0$.

2. On note A, B, C, les points d'affixes respectives : $a = 2$; $b = 1 + \text{i}\sqrt{3}$; $c = 1 - \text{i}\sqrt{3}$.

a. Déterminer le module et un argument de a, b, c.

b. En déduire le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

c. Placer les points A, B et C en laissant visibles les traits de construction.

d. Démontrer que le quadrilatère OBAC est un losange.

3. On pose $d = a + b$ et on note D le point d'affixe d.

a. Construire le point D dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

b. Démontrer que A est le milieu du segment [CD].

c. Écrire d sous forme exponentielle.

d. Démontrer que OCD est un triangle rectangle.

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : Calcul d'une primitive

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par

$$g(x) = \frac{x}{x+1}$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; 2]$, $g(x) = a + \dfrac{b}{x+1}$.

2. En déduire une primitive de g sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

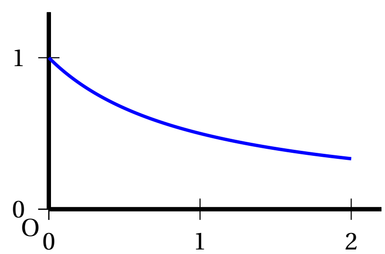
Partie B : Détermination du centre de gravité d'une plaque homogène

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~2]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

On considère une plaque homogène formée par l'ensemble des points $M(x~;~y)$ du plan dont les coordonnées vérifient les relations : $0 \leqslant x \leqslant 2$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. (Voir schéma ci-dessous).

1. Soit $\mathcal{S}$ l'aire de la plaque exprimée en unité d'aire.
   Démontrer que $\mathcal{S} = \ln 3$.
2. Soit G le centre de gravité de la plaque. On admettra que les coordonnées $(X~;~Y)$ de G sont données par les formules suivantes :
   $X = \dfrac{1}{\mathcal{S}}\displaystyle\int_0^2 xf(x)\,\mathrm{d}x$ et
   $Y = \dfrac{1}{2\mathcal{S}}\displaystyle\int_0^2 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.
   a. Calculer la valeur exacte de X, puis une valeur approchée arrondie au centième.
   b. Calculer la valeur exacte de Y, puis une valeur approchée arrondie au centième.



PROBLÈME **10 points**

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (1) : $y' + y = 2\mathrm{e}^{-x}$, dans laquelle y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x, dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' + y = 0$.
2. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$. Vérifier que h est solution de l'équation (1).
3. On admet que toute solution de (1) s'écrit sous la forme $g + h$, où g désigne une solution de l'équation (2).
   a. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).
   b. Déterminer la solution f de l'équation (1) vérifiant la condition initiale $f(0) = -1$.

Partie B. Étude d'une fonction exponentielle

On note f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. Unités graphiques : 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

1. Étude des limites.
   a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. En écrivant, pour tout réel x, $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
   Quelle conséquence graphique peut-on en tirer pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. étude des variations de f

a. Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f, puis démonter que, pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de $(-2x+3)$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f

3. Représentations graphiques.

a. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

b. Déterminer une équation de chacune des tangentes (T) et (T') à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.

c. Tracer (T), (T') et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie C. Détermination d'une primitive

1. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = -f'(x) + 2\mathrm{e}^{-x}$.

2. En déduire une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.