Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie 14 septembre 2012
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chacune des questions suivantes, **une seule** des réponses proposées est correcte.
Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte un point. Une absence de réponse ou une mauvaise réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.
Le candidat indiquera sur la copie, le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la réponse proposée.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = \sqrt{3} - i, \quad z_B = \sqrt{3} + i, \quad z_C = -\sqrt{3} + i, \quad z_D = -\sqrt{3} - i.$$

1. Les solutions complexes de l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ sont :

a. z_C et z_D **b.** z_A et z_C **c.** z_A et z_B **d.** z_A et z_D

2. Le module et un argument du nombre complexe z_A sont :

a. $\left\{\begin{array}{lcl} |z_A| & = & \sqrt{2} \\ \arg z_A & = & -\dfrac{\pi}{6} \end{array}\right.$ **b.** $\left\{\begin{array}{lcl} |z_A| & = & \sqrt{2} \\ \arg z_A & = & \dfrac{\pi}{3} \end{array}\right.$ **c.** $\left\{\begin{array}{lcl} |z_A| & = & 2 \\ \arg z_A & = & \dfrac{5\pi}{6} \end{array}\right.$ **d.** $\left\{\begin{array}{lcl} |z_A| & = & 2 \\ \arg z_A & = & -\dfrac{\pi}{6} \end{array}\right.$

3. L'ensemble des points d'affixe z tels que $\left|z - \sqrt{3} - i\right| = \left|z - \sqrt{3} + i\right|$ est :

a. la droite (CD) **b.** l'axe des abscisses **c.** l'axe des ordonnées **d.** la droite (AB)

4. Le nombre complexe $\dfrac{z_A}{z_B}$ est égal à :

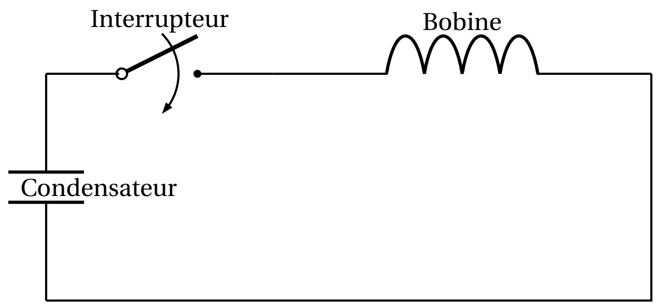
a. -1 **b.** 1 **c.** $1 - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **d.** $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$

5. L'affixe du point E, tel que le quadrilatère DEAC est un parallélogramme, est :

a. $-3\sqrt{3} + i$ **b.** $2\sqrt{3} - 2i$ **c.** $\sqrt{3} - 3i$ **d.** $\sqrt{3} + i$

EXERCICE 2 **4 points**

On considère le circuit ci-dessous composé d'une bobine, d'un condensateur et d'un interrupteur.



Le condensateur est initialement chargé.
Au temps $t = 0$, on ferme l'interrupteur. On étudie alors la décharge du condensateur dans la bobine.
On admet qu'à un instant t, la charge q du condensateur, qui est une fonction du temps t, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$q'' + 121 \times 10^6 q = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer l'expression de la solution particulière q de (E) qui vérifie les conditions :

$$q(0) = 2 \times 10^{-6} \quad \text{et} \quad q'(0) = 0.$$

   Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction q ainsi obtenue.
3. Montrer que l'intensité $i(t)$, définie par $i(t) = q'(t)$, où q' désigne la fonction dérivée de la fonction q, est donnée, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, par :

$$i(t) = -2,2 \times 10^{-2} \sin\left(11 \times 10^3 t\right).$$

4. Déterminer la valeur moyenne de la fonction q sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi \times 10^{-3}}{2 \times 11}\right]$.
   On en donnera la valeur exacte.
   On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur l'intervalle $[a ; b]$ est donnée par :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

PROBLÈME **11 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = 3 - 3\ln x + x^3.$$

1. **a.** Montrer que la fonction dérivée g' de la fonction g peut s'écrire, pour tout nombre réel x strictement positif, sous la forme :

$$g'(x) = \frac{3(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x}.$$

   b. Déterminer le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
   c. En déduire les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
2. Donner la valeur de $g(1)$.
3. Déduire des questions précédentes que la fonction g est strictement positive sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Partie B : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 3\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}x^2 + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. **a.** Établir que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}, \text{ où } g \text{ est la fonction définie dans la } \textbf{partie A}.$$

   b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. **a.** Montrer que sur l'intervalle $[0{,}5~;~1]$, la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point. On notera α l'abscisse de ce point.
   À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. On note $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. La parabole $\mathscr{P}$ est représentée en **annexe**, à rendre avec la copie.
   Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.
   On précisera les coordonnées du point d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.
5. Tracer sur le graphique de **l'annexe**, à rendre avec la copie, la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : calcul d'une aire

On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan délimité, d'une part, par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$, d'autre part, par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \text{e}$.

1. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique de l'**annexe**, à rendre avec la copie.
2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

   Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.
3. Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unité d'aire.

Annexe (problème)
à rendre avec la copie