∽ Baccalauréat STI Nouvelle–Calédonie ∾
Génie électronique, électrotechnique, optique novembre 2002

EXERCICE 1 **5 points**

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2 - 6z + 12 = 0.$$

1. Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.
   Soient z_1 et z_2 les solutions, z_1 étant celle dont la partie imaginaire est positive.
2. Écrire z_1 puis z_2 sous la forme $re^{\mathrm{i}\theta}$ où r est un nombre réel positif, i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ et θ un nombre réel (r représente donc le module du nombre complexe et θ un argument).
   En déduire que $\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
3. Dans le plan $\mathscr{P}$, rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm, construire géométriquement les points A_1 et A_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 (on n'utilisera pas de valeurs approchées).
   Montrer l'existence d'une rotation de centre O qui transforme A_2 en A_1.
   Déterminer l'angle α de cette rotation.
4. On note A_0 l'image de A_1 par la rotation de centre O et d'angle α.
   Construire géométriquement A_0.
   Déterminer l'affixe du point A_0.
5. Quelle est la nature du quadrilatère $\mathrm{OA}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

Un dé cubique est truqué. Une partie consiste à lancer le dé et à noter le numéro de la face supérieure.
Soit X la variable aléatoire égale à ce numéro. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6
$P(X = i)$	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

La règle du jeu est la suivante : un joueur mise 10 euros.
Il reçoit 20 euros si le numéro est 1 ou 6, 10 euros si le numéro est 3 ou 4, 0 euro si le numéro est 2 ou 5.
Le gain d'un joueur est la différence entre ce qu'il reçoit et ce qu'il mise (le gain peut donc être soit positif soit négatif). Soit Y la variable aléatoire égale au gain du joueur au cours d'une partie.

1. Quelles sont les valeurs prises par Y ?
2. Déterminer la loi de probabilité de Y.
3. Calculer l'espérance mathématique de Y.
4. On rappelle qu'un jeu est équitable lorsque l'espérance du gain est nulle.
   Pour le jeu décrit ci-dessus, on se propose de modifier la mise. La nouvelle mise est notée m et est exprimée en euros.
   Quelle valeur faut-il donner à m pour rendre le jeu équitable ?

PROBLÈME **10 points**

Partie A : étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \frac{1}{2\left(\mathrm{e}^x + 1\right)}.$$

$\mathscr{C}$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. **a.** Démontrer que la droite D_1 d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

   b. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D_1
3. Pour tout réel x, M désigne le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et M' le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $-x$.

   a. Déterminer, en fonction de x, les coordonnées du point I milieu du segment $[MM']$.

   b. Que constatez-vous ? Qu'en déduisez-vous pour la courbe $\mathscr{C}$?
4. **a.** Vérifier que pour tout réel x :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}^x}{2\left(\mathrm{e}^x + 1\right).}$$

   b. Démontrer que la droite D_2 d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

   c. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D_2.
5. Soit f' la dérivée de f.

   Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^x + 2}{2\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2}$.

   Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) > 0$.

   Dresser le tableau de variations de la fonction f.
6. Tracer D_1, D_2 et $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère orthonormal$\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm.

Partie B : calcul d'une primitive

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2\left(\mathrm{e}^x + 1\right)}$$

1. Vérifier que pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)}$.
2. En déduire une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$.