Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Polynésie 11 juin 2012 ∾
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **4 points**

Baptiste, François, Kévin et Thomas ont décidé de partir ensemble cet été à Londres. Ils ont convenu que chacun d'entre eux réserverait de son côté par internet son billet de train aller-retour Paris-Londres aux dates et heures qu'ils ont choisies en commun.
La politique tarifaire appliquée pour la vente des billets est la suivante : la première moitié des billets est vendue au tarif réduit de 90 euros (tarif noté R) puis la seconde moitié des billets est vendue au tarif normal de 120 euros (tarif noté N).
Les quatre amis, ignorant cette politique, réservent leurs billets à des moments différents sans savoir de quel tarif ils bénéficieront. On s'intéresse aux tarifs payés par Baptiste, François, Kévin et Thomas. Ainsi, on notera NNRR l'évènement élémentaire : « Baptiste paie 120 euros, François paie 120 euros, Kévin paie 90 euros et Thomas paie 90 euros ».

1. Écrire les seize évènements élémentaires (on pourra s'aider d'un arbre).
2. On suppose que les seize évènements élémentaires sont équiprobables.
   On considère les trois évènements suivants :
   A : « Les quatre amis paient le tarif réduit » ;
   B : « Aucun des quatre amis ne paie le tarif réduit » ;
   C : « Au moins un des quatre amis paie le tarif réduit ».
   a. Citer deux évènements contraires parmi les évènements A, B et C.
   b. Calculer les probabilités de chacun des évènements.
3. On note X la variable aléatoire qui, à chaque évènement élémentaire, associe la somme totale en euros payée par les quatre amis.
   a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b. Dresser le tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

EXERCICE 2 **6 points**

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 centimètre. On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -2\sqrt{3}+2\text{i} \quad ; \quad z_{\text{B}} = -2\sqrt{3}-2\text{i}$$

1. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes z_{A} et z_{B}, puis placer les points A et B.
2. On désigne par C l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.
   a. Calculer l'affixe z_{C} du point C, puis placer ce point sur la figure.
   b. Montrer que le quadrilatère OCAB est un losange.
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte.

3. Soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

$$\left|z+2\sqrt{3}-2\text{i}\right|=4.$$

 a. Montrer que le point C appartient à l'ensemble Γ.

 b. Justifier que Γ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

 c. Tracer l'ensemble Γ sur la figure.

4. On note D l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{w}=-7\overrightarrow{u}$.

 a. Placer le point D sur la figure.

 b. Le point D est-il sur le cercle Γ ? Justifier.

PROBLÈME **10 points**

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 centimètre.
Le but de ce problème est :

— d'émettre des conjectures sur la fonction f dans la partie A ;
— d'établir des résultats concernant ces conjectures dans la partie B ;
— de vérifier la validité de ces conjectures dans la partie C.

Partie A : Lecture graphique

On a obtenu à l'aide d'un logiciel la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,20[$ (la courbe est fournie en annexe).
On précise que la droite T est la tangente à la courbe de la fonction f au point A d'abscisse 1.
Par simple lecture graphique, déterminer :

1. la limite de la fonction f en zéro ;
2. une valeur de la (ou des) solution(s) de l'équation $f(x)=0$;
3. le signe de $f(x)$ en fonction de x ;
4. le sens de variation de la fonction f ;
5. l'équation réduite de la tangente T ;
6. une valeur approchée de l'aire du domaine grisé en centimètres carrés.

Partie B : Étude d'une fonction
On admet dans cette partie que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f(x)=(\ln x)^2-5\ln x+4$$

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en zéro.
2. **a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ l'équation $X^2-5X+4=0$.

 b. En déduire, en posant $X=\ln x$, les solutions de l'équation $f(x)=0$.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

 a. Pour tout x dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, calculer $f'(x)$ et justifier que $f'(x)$ est du signe de $2\ln x-5$.

 b. Résoudre l'inéquation $2lnx-5\ 0$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

 c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

 d. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

4. Établir une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

5. On donne les fonctions g, h, G et H suivantes, définies sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :
$g(x) = \ln x, h(x) = (\ln x)^2, G(x) = x\ln x - x$ et $H(x) = x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right]$.
On admet que G est une primitive de la fonction g et que H est une primitive de la fonction h sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$.

b. Calculer $I = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} -f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie C : Conclusion

1. Parmi les conjectures formulées dans la partie A, indiquer en détaillant les réponses :
— celles qui ont été vérifiées ;
— celles qui sont fausses ;
— celles pour lesquelles on ne peut pas conclure.
On s'appuiera sur les résultats obtenus dans la partie B.

2. On souhaite tracer sur l'écran d'une calculatrice la courbe représentative de la fonction f de manière à visualiser les résultats établis dans la partie B. Proposer un paramétrage de fenêtre de la calculatrice qui permet d'obtenir un tel tracé.

Annexe (problème) à rendre avec la copie