Baccalauréat STI Antilles juin 2000
Génie électronique, électrotechnique, optique

Durée : 4 heures　　Coefficient : 4

EXERCICE 1　　**4 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.
Soient les nombres complexes z_1 et z_2 tels que $z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}$ et $z_2 = 2 - 2\mathrm{i}$.

1. **a.** Calculer le module et un argument de chacun des deux nombres complexes z_1 et z_2.

   b. Écrire le quotient $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel.

2. $\mathscr{P}$ est le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm dans lequel les points M_1 et M_2 sont les points d'affixes respectives z_1 et z_2.
   Dans ce plan :

   a. placer les points M_1 et M_2 ;

   b. montrer qu'il existe une rotation de centre O qui transforme M_2 en M_1.
   Donner une mesure, en radian, de l'angle de cette rotation.

3. **a.** En utilisant les formes algébriques de z_1 et de z_2 données dans l'énoncé, écrire le quotient $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.

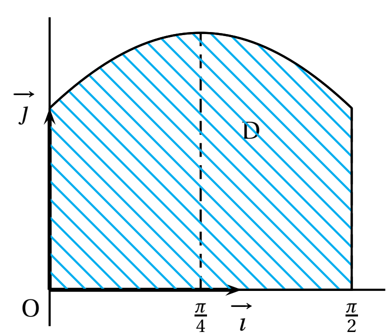
   b. Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 2　　**4 points**

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$, où y désigne une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et où y'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction y.

   b. Déterminer la solution particulière f de cette équation différentielle vérifiant $f(0) = 1$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$. ($f'$ désigne la fonction dérivée de la fonction f.)

2. L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ d'unité graphique 4 cm.
   Le but de cette question est de calculer le volume V engendré par la rotation, autour de l'axe des abscisses, du domaine D hachuré sur le dessin ci-dessous :



   Dans le plan rapporté au repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ le domaine D est limité par :

   - la courbe représentative de la fonction f trouvée à la question précédente ;
   - l'axe des abscisses ;

- l'axe des ordonnées;
- la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 0\right)$.

a. Montrer que, pour tout x réel :

$$[f(x)]^2 = 1 + \sin(2x).$$

b. Sachant que :

$$\mathrm{V} = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x,$$

calculer la valeur exacte de V en unité de volume.

c. Donner la valeur de V arrondie au mm^3. (Exprimer le résultat en cm^3.)

PROBLÈME **12 points**

Dans ce problème :

- I désigne l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$;
- f désigne la fonction définie, pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x - 1};$$

- f' désigne la fonction dérivée de la fonction f ;
- $\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(\mathrm{O}x,\ \mathrm{O}y)$ d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

1. **a.** Vérifier que, pour tout x de l'intervalle I :

$$f(x) = \mathrm{e}^x + 1 + \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

b. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. **a.** Vérifier que, pour tout x de l'intervalle I :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^x - 2\right)}{\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2}.$$

b. Étudier, pour tout x de l'intervalle I, le signe de $f'(x)$.

En déduire le sens de variations de la fonction f et que, pour tout x de l'intervalle I, $f(x) > 0$.

3. **a.** Résoudre, dans l'intervalle I, l'équation, d'inconnue x, $f(x) = \dfrac{9}{2}$.

b. Déduire, du résultat obtenu à la question précédente, les coordonnées des points A et B, points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite dont une équation est $y = \dfrac{9}{2}$.

(A est le point d'intersection dont l'abscisse est la plus petite.)

Partie B

Soit la fonction g définie, pour tout x de l'intervalle I, par :

$$g(x) = \mathrm{e}^x + 1.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté au repère $(\mathrm{O}x, \mathrm{O}y)$.
$\mathscr{C}_g$ est donnée sur le graphique ci-après.
On note h la fonction définie, pour tout x de l'intervalle I, par :

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

1. **a.** Étudier, pour tout x de l'intervalle I, le signe de $h(x)$; en déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_f$, par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$.

   b. Résoudre dans l'intervalle I, l'inéquation, d'inconnue x, $h(x) \leqslant 0,05$.
   On admet que deux points du plan de même abscisse sont indiscernables sur un dessin dès que la différence de leurs ordonnées a une valeur absolue inférieure à 0,05.
   Déterminer un demi-plan dans lequel les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont indiscernables.

   c. Tracer, avec soin, la courbe $\mathscr{C}_f$ sur le graphique ci-après.

2. Montrer que, pour tout x de I :

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} - 1 .$$

   En déduire une fonction primitive de h sur I.

3. Calculer l'aire S de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = \ln 2$ et $x = \ln 3$.
   (Exprimer le résultat en cm^2.)