∽ Bac STI Antilles–Guyane – Juin 2003 ∾
Génie électronique

L'usage des calculatrices et des instruments de calcul est autorisé.

Exercice 1 **5 points**

Soit la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2.$$

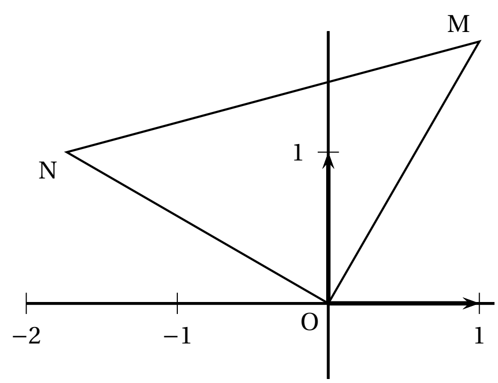
1. Vérifier que pour tout x réel, $P(x) = (x-1)\left(2x^2 + 5x + 2\right)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (1) : $P(x) = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (2) : $\ln\left(4 - x^2\right) + \ln(2x+3) = \ln 5 + \ln(x+2)$.
4. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$ l'équation
   (3) : $2\cos^3(x) + 3\cos^2(x) - 3\cos(x) - 2 = 0$.

Exercice 2 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des trois questions suivantes, ***une ou plusieurs réponses sont exactes****.*
Vous indiquerez sur votre copie cette (ou ces) réponse(s) exacte(s). Aucune justification n'est demandée.

Question 1

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, le triangle OMN est rectangle isocèle en O. Le point M a pour affixe $Z_{\text{M}} = 1 + \text{i}\sqrt{3}$, le point N a pour affixe $Z_{\text{N}} = \text{i}Z_{\text{M}}$.



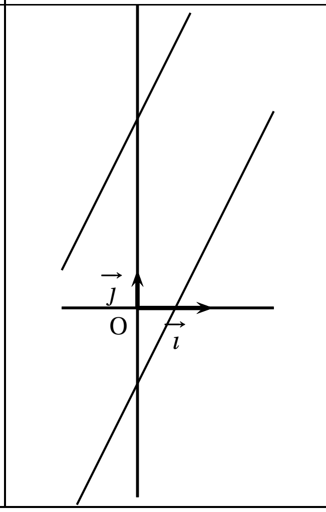
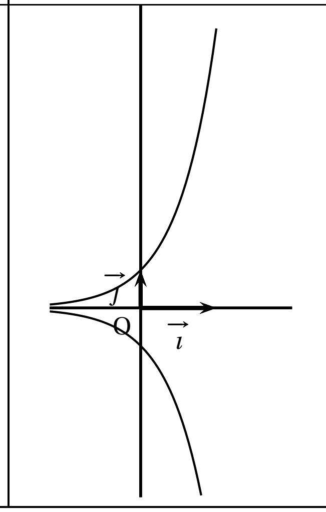
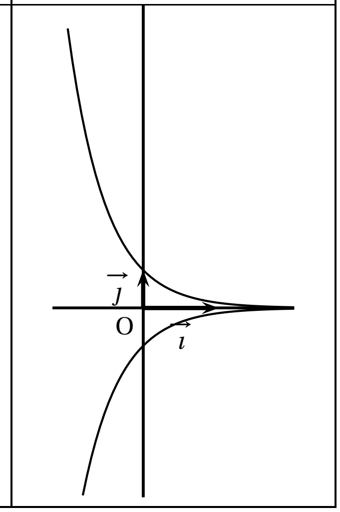
À quel nombre complexe Z_{N} est-il égal ?

Réponse	A	B	C	D
Expression de Z_{N}	$-\dfrac{3}{2} + \text{i}$	$-\sqrt{3} + \text{i}$	$\dfrac{-2 + 2\text{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \text{i}}$	$2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$

Question 2
Les nombres $\ln 6, \ln 18, \ln 54$ sont les termes consécutifs d'une suite, quelle est la nature de cette suite ?

Réponse	A	B	C
Nature de la suite	géométrique de raison 3	arithmétique de raison 3	géométrique de raison $\ln 3$

Question 3
On considère l'équation différentielle $y' + 2y = 0$. Chaque figure ci-dessous comporte deux courbes. Indiquer, parmi les figures A, B ou C, celle(s) susceptible(s) de comporter les courbes représentatives de deux solutions de cette équation différentielle.

Réponse	A	B	C
Figure			

Problème **4 points**

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{-x} - 3.$$

1. On appelle g' la fonction dérivée de g. Calculer $g'(x)$ puis étudier son signe pour x appartenant à $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
3. Vérifier que $g(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - 3$, puis déterminer la limite de g en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
5. Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à l'intervalle $[-2 ; 2]$, tel que $g(\alpha) = 0$.
6. À l'aide d'une calculatrice, déterminer un encadrement de α à 10^{-3} près, puis une valeur approchée de α à 10^{-3} près par excès.
7. Dresser le tableau donnant le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} - 3x + 4.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. On note f' la fonction dérivée de f, montrer que pour tout x réel $f'(x) = g(x)$.
2. En remarquant que pour tout réel x, $f(x) = x\left(\mathrm{e}^{-x} - 3\right) + 4$, déterminer la limite de f en $-\infty$.
3. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Soit la droite Δ d'équation $y = -3x + 4$ dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

   Montrer que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$; étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ.
4. Établir le tableau de variations de la fonction f.

5. Déterminer dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ une équation de la tangente $\mathrm{T_A}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ en son point A d'abscisse 0.
6. Tracer dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, les droites Δ, $\mathrm{T_A}$ et la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie C

1. Soit r la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$r(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

   On appelle r' la fonction dérivée de r, calculer $r'(x)$; en déduire une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
2. On considère la portion de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$ l'asymptote Δ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$.
   Hachurer cette portion de plan sur le graphique et donner la valeur exacte de son aire exprimée en cm^2 puis une valeur approchée à 10^{-2} près.