Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie électronique Antilles ∾ juin 2005

EXERCICE 1 **4 points**

Soit (E) l'équation différentielle : $9y'' + \pi^2 y = 0$ où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées $\left(0\,;\sqrt{3}\right)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -\dfrac{\pi}{3}x$.
3. Montrer que, pour tout réel x, f peut s'écrire sous la forme : $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.
4. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;3]$.

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Soit le nombre complexe $z = 1 - \text{i}\sqrt{3}$ et soit A le point d'affixe z.

1. Calculer le module et un argument de z, donner leur interprétation géométrique puis en utilisant ces deux valeurs, placer le point A.
2. On considère les points B et C d'affixes respectives z^2 et $\dfrac{2}{z}$.
   a. Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes z^2 et $\dfrac{2}{z}$.
   b. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes z^2 et $\dfrac{2}{z}$.
   c. Placer dans le plan les points B et C.
3. Montrer que les points A, B et C appartiennent à un cercle dont le centre Ω a pour affixe $\omega = -\dfrac{3}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan est rapporte à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-3\,;\,2[$ par $f(x) = \ln\left(ax^2 + bx + c\right)$.

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer les réels a b et c.

1. Montrer que : pour tout $x \in]-3\,;\,2[$, $f'(x) = \dfrac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}$.

2. **a.** Traduire les données ci-dessous par des relations entre $a,\ b$ et c.
   - La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points A$(0\ ;\ \ln 6)$ et B$\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 2\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)\right)$.
   - Au point B, la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale.

   b. Déterminer $a,\ b$ et c.

Partie B - étude de la fonction f

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -x^2 - x + 6$$

et f la fonction de la partie A définie sur $]-3\ ;\ 2[$ par $f(x) = \ln[g(x)]$. La courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans le repère précédent est donnée en **ANNEXE**.

1. **a.** Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

   b. Déterminer les limites suivantes : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -3\\ x>-3}} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$.

   c. En déduire les équations des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$
2. Montrer que : pour tout $x \in]-3\ ;\ 2[,\ f'(x) = \dfrac{-2x-1}{g(x)}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer une équation de la tangente â $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
5. **a.** Montrer que, sur l'intervalle $[0\,;\,1{,}9]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0.

   b. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de x_0 d'amplitude 10^{-2}.

Partie C - Calcul d'aire

Soit F la fonction définie sur $]-3\ ;\ 2[$ par :

$$F(x) = (x+3)\ln(x+3) + (x-2)\ln(-x+2) - 2x.$$

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]-3\ ;\ 2[$.
2. **a.** Préciser à l'aide du graphique le signe de f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   b. Calculer la valeur exacte $\mathscr{A}$ (en unités d'aire), de l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

ANNEXE : courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f