Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Antilles–Guyane juin 2009 Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **4 points**

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère le polynôme P de la variable complexe z défini de la façon suivante :

$$P(z) = 9z^3 - 21z^2 + 17z - 5.$$

1. Calculer $P(1)$.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que $P(z) = (z-1)\left(az^2 + bz + c\right)$.
3. Résoudre dans l'ensemble des complexes l'équation : $P(z) = 0$.
4. On munit le plan d'un repère direct orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$d'unité graphique 6 cm.
   Soient A, B et C les points d'affixes respectives :
   $$z_{\text{A}} = 1,~z_{\text{B}} = \frac{1}{3}(2+\text{i}) \text{ et } z_{\text{C}} = \frac{1}{3}(2-\text{i}).$$
   a. Placer les points A, B et C (on utilisera une des feuilles de papier millimétré fournies).
   b. Calculer les modules suivants : $|z_{\text{B}} - z_{\text{A}}|$, $|z_{\text{A}} - z_{\text{C}}|$ et $|z_{\text{B}} - z_{\text{C}}|$; en déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.
5. Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC.
   a. Déterminer l'affixe du centre Ω de $\mathscr{C}$ et son rayon r en cm.
   b. Placer Ω et tracer le cercle $\mathscr{C}$ sur la figure.

EXERCICE 2 **5 points**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A - Effet de réponses au hasard à un exercice de type vrai/faux.

On imagine un exercice vrai/faux à quatre questions dont la règle de notation serait la suivante : chaque réponse correcte rapporte un point. Chaque réponse incorrecte fait perdre un demi-point. Un total négatif pour ce vrai/faux est ramené à zéro.

On suppose qu'un élève répond au hasard à chacune des quatre questions par « vrai » ou « faux » et qu'il ne laisse aucune question sans réponse.

1. Indiquer dans un tableau tous les totaux de points possibles en fonction du nombre de réponses correctes fournies.
2. Compléter l'arbre des choix de la feuille annexe avec les mots « correct » et « incorrect », puis indiquer, dans la dernière colonne, le nombre de points obtenus pour chacune des 16 éventualités.
3. On suppose que chacune des 16 éventualités a la même probabilité d'être obtenue. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque éventualité, associe le nombre de points correspondant.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de X.

c. Calculer $\mathrm{E}(X)$, l'espérance mathématique de X.

Partie B - Un exercice de type vrai-faux.

Cette partie B est un exercice de type vrai/faux qui doit être traité effectivement par le candidat.

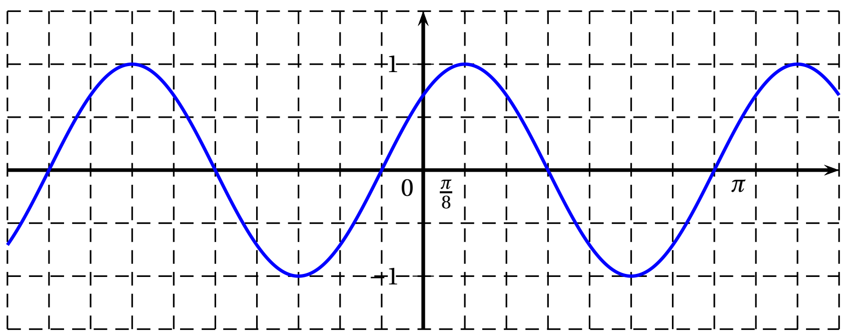
La règle de notation est la suivante : à chaque bonne réponse est attribué 0,5 point. Toute réponse incorrecte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'enlève aucun point. En cas de total négatif, la note attribuée à cette partie sera 0.

Le texte ci-dessous comporte quatre affirmations, numérotées de 1 à 4.
Pour chacune d'elles, indiquer sur la copie si elle est vraie ou fausse. On ne demande aucune justification.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels par

$$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Une partie de la courbe représentative de la fonction f est tracée ci-dessous :



Affirmation 1 : L'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution dans $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$.

Affirmation 2 : $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{8}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1-\sqrt{2}}{4}$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 3\sin(2x)$.

Affirmation 3 : g est une solution de l'équation différentielle : $y'' + 4y = 0$.

Affirmation 4 : La valeur moyenne de g sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ vaut $\frac{12}{\pi}$.

PROBLÈME **11 points**

Partie I

On considère la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$g(x) = x - 1 + \mathrm{e}^{2x}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan.
On prend comme unité graphique 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 1$.
   a. Démontrer que $\mathcal{D}$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $-\infty$.
   b. Étudier les positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}_g$.
3. Soit g' la fonction dérivée de g.
   a. Calculer, pour tout x réel, $g'(x)$ et montrer que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   b. Dresser le tableau de variations de g.
4. Calculer $g(O)$ puis justifier l'affirmation suivante : « si $x < 0$, alors $g(x) < 0$; si $x > 0$, alors $g(x) > 0$ ».
5. Construire dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}_g$. (On utilisera une feuille de papier millimétré.)

Partie II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^2 + \text{e}^{2x}.$$

1. Soit f' la fonction dérivée de f. Démontrer que, pour tout x réel, $f'(x) = 2g(x)$.
2. En utilisant la question I. 4., dresser le tableau de variation de la fonction f (les limites ne sont pas demandées).
3. En déduire la valeur de x pour laquelle la fonction f admet un minimum et déterminer ce minimum.

Partie III - *Application à un problème de distance minimale*

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

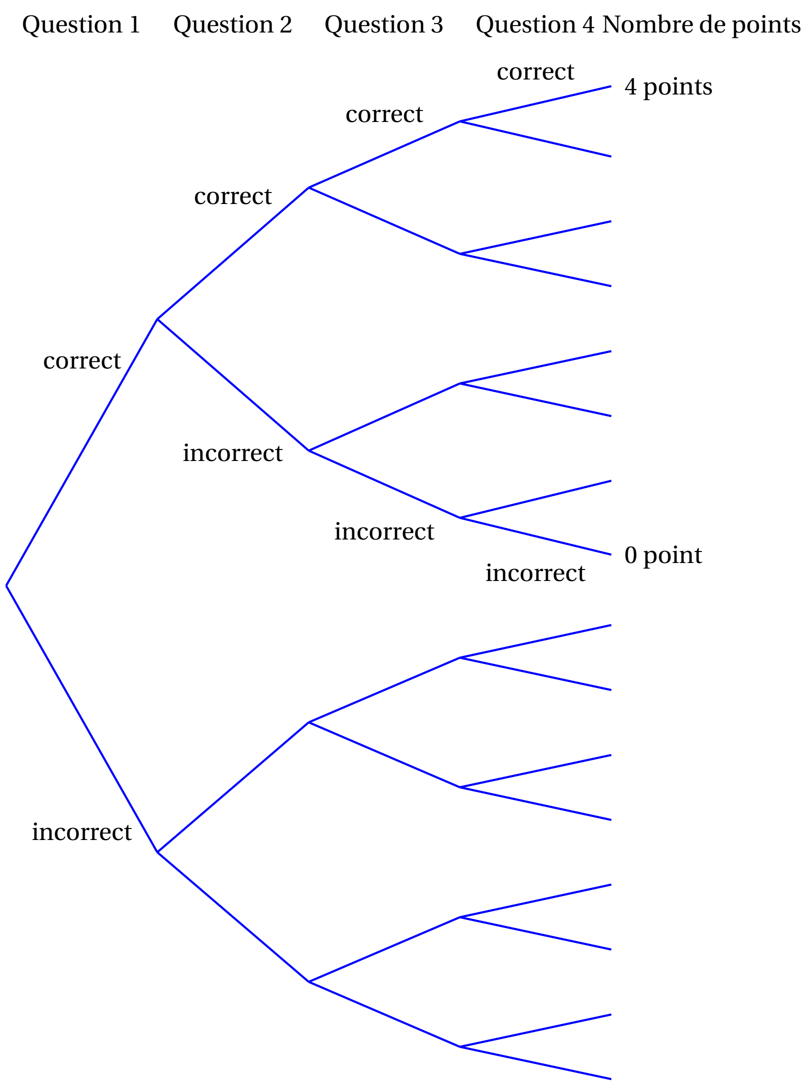
$$h(x) = \text{e}^x.$$

On donne en annexe la courbe représentative $\mathcal{C}_h$ de la fonction h dans un repère orthonormal d'origine Ω. On a également représenté le point P de coordonnées $(1 ; 0)$.

On rappelle que, dans un repère orthonormal, le carré de la distance entre les points $\text{A}\left(x_\text{A},\ y_\text{A}\right)$ et $\text{B}\left(x_\text{B},\ y_\text{B}\right)$ est donné par : $\text{AB}^2 = \left(x_\text{B} - x_\text{A}\right)^2 + \left(y_\text{B} - y_\text{A}\right)^2$.

1. **a.** Placer, dans le repère donné en annexe, les points $\text{A}\left(-1 ; \text{e}^{-1}\right)$ et $\text{B}(1 ; \text{e})$
   b. Calculer PA^2 et PB^2.
2. On considère, pour un réel x, le point M de $\mathcal{C}_h$ d'abscisse x, c'est-à-dire le point $M(x ; \text{e}^x)$.
   a. Montrer que $\text{P}M^2 = f(x)$, où f est la fonction étudiée dans la partie II.
   b. En déduire les coordonnées du point de la courbe $\mathcal{C}_h$ le plus proche du point P. *Dans cette question particulièrement, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Feuille annexe à rendre agrafée à la copie



Problème : partie II