∽ Baccalauréat STI Antilles–Guyane juin 2010 ∾
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **5 points**

Rappel : i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$z^2 - 10z + 50 = 0.$$

   On explicitera les étapes de la résolution.

2. Pour tout nombre complexe z, on pose

$$P(z) = z^3 - 20z^2 + 150z - 500.$$

   a. Calculer $P(10)$.

   b. Déterminer des nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z, on ait :

$$P(z) = (z - 10)\left(az^2 + bz + c\right).$$

   c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 5 + 5\text{i},\quad z_{\text{B}} = 5 - 5\text{i},\quad z_{\text{C}} = z_{\text{A}} + z_{\text{B}}\quad \text{et}\quad z_{\text{D}} = 5.$$

   a. Placer les points A, B, C et D (on utilisera une feuille de papier millimétré et on prendra comme unité graphique 1 cm).

   b. Déterminer le module et un argument de $z_{\text{A}}, z_{\text{B}}$ et z_{C}.

   c. Déterminer, en justifiant, la nature du quadrilatère OACB.

4. Soit E le point d'affixe $z_{\text{E}} = 2 + 4\text{i}$.

   a. Placer le point E sur la figure précédente.

   b. Calculer les modules des nombres complexes $z_{\text{A}} - z_{\text{D}}$, $z_{\text{B}} - z_{\text{D}}$ et $z_{\text{E}} - z_{\text{D}}$.

   c. Montrer que le triangle EAB est rectangle.

EXERCICE 2 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Dans chacune des questions suivantes trois affirmations sont proposées, une seule de ces affirmations est exacte.
Sur la copie, noter le numéro de la question et recopier l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée.

Barème : Une réponse exacte rapporte 1 *point, une réponse inexacte enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse ou la donnée de plusieurs réponses à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Si le total donne un nombre négatif, la note attribuée à cet exercice sera ramenée à zéro.*

1. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = x + 1$ où la fonction inconnue y, de la variable x, est définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et y' désigne sa fonction dérivée.

- La fonction f définie par $f(x) = \text{e}^{-x} + 1$ est une solution de l'équation différentielle (E).
- La fonction g définie par $g(x) = \text{e}^{-x} + x$ est une solution de l'équation différentielle (E).
- La fonction h définie par $h(x) = \text{e}^{-x} + x + 1$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2. Un sac contient 32 jetons : huit rouges, huit jaunes, huit bleus et huit verts. Les huit jetons d'une même couleur sont numérotés de 1 à 8. Un joueur tire au hasard un jeton dans le sac. On suppose que les tirages des jetons sont équiprobables.

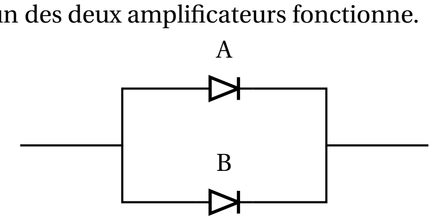
S'il tire le numéro 8 rouge, il gagne 16 euros ; s'il tire un numéro 8 qui n'est pas rouge, il gagne 8 euros ; s'il tire un jeton rouge qui n'est pas le numéro 8, il gagne 4 euros ; pour tout autre tirage, il perd 4 euros.

On note X la variable aléatoire qui, à chacun des résultats possibles du tirage, associe le gain ou la perte réalisé par le joueur en euros, un gain étant compté positivement et une perte négativement. Les valeurs que peut prendre X sont donc : 16 ; 8 ; 4 ; -4.

- La probabilité pour que X prenne la valeur 4 est égale à $\dfrac{1}{4}$.
- L'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut $-0,5$.
- La probabilité pour que X prenne une valeur inférieure ou égale à 4 est égale à $\dfrac{3}{4}$.

3. Un système est formé de deux amplificateurs A et B. À partir d'un signal appliqué à l'entrée E, on obtient un signal à la sortie S si au moins l'un des deux amplificateurs fonctionne.

On considère les évènements :
A : « L'amplificateur A fonctionne » ;
B : « L'amplificateur B fonctionne ».



On note $P(A)$ et $P(B)$ les probabilités respectives des évènements A et B.

On suppose que $P(A) = 0,9$; $P(B) = 0,75$ et que la probabilité pour que l'on n'ait pas de signal à la sortie est égale à $0,05$. On note p la probabilité pour que A et B fonctionnent simultanément.

- $p = 0,15$.
- $p = 0,7$.
- $p = 0,75$.

4. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \text{e}^{2+3n}$.

- La suite (u_n) est une suite arithmétique.
- La suite (u_n) est une suite géométrique.
- La suite (u_n) n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : Étude de signe

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$g(x) = \text{e}^{2x} - \text{e}^{x} + 1.$$

1. Montrer que, pour tout nombre réel x, $g(x) = \left(\text{e}^{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.

2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 2 - \frac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. a. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

b. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

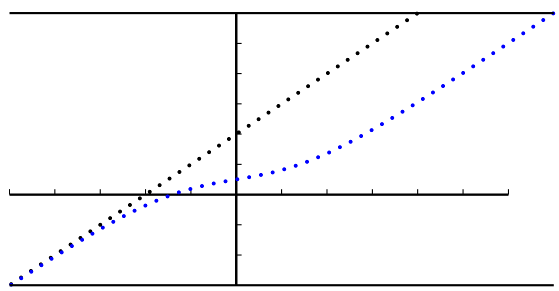
2. On considère la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x + 2$.

a. Démontrer que la droite $\mathscr{D}_1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

b. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}_1$.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

En visualisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_1$ sur l'écran d'une calculatrice graphique, on obtient le tracé suivant, pour les abscisses comprises entre -5 et 7 et les ordonnées comprises entre -3 et 6, les graduations apparentes sur les axes correspondent aux coordonnées entières.



Au vu de ce tracé, deux élèves ont deviné que cette courbe admet une asymptote en $+\infty$, que l'on notera $\mathscr{D}_2$, le premier pense que $\mathscr{D}_2$ a pour équation $y = x - 1$, le deuxième n'est pas d'accord et pense que cette asymptote a pour équation $y = x - 2$.

En effectuant un calcul de limite, déterminer lequel des deux a raison.

4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$), où g désigne la fonction définie dans la partie A.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, qu'on notera α, sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$, puis déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

6. En utilisant une feuille de papier millimétré et en prenant comme unité graphique 2 cm, tracer, dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et Δ ainsi que la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : Calcul d'aire

1. Déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On pourra remarquer que $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

2. On note $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

a. Hachurer cette partie du plan.

b. On admet que la fonction f est positive sur $[-1\ ;\ 1]$. Écrire, à l'aide d'une intégrale, l'aire $\mathscr{A}$ exprimée en unités d'aire.

c. Montrer que $\ln(\mathrm{e}+1) - \ln\left(\mathrm{e}^{-1}+1\right) = 1$.

d. En déduire la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$.

3. On note $\mathscr{A}'$ l'aire de la partie du plan comprise entre la droite d'équation $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$, exprimée en unités d'aire. Montrer que $\mathscr{A}' = \mathscr{A}$.