Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie électronique Antilles septembre 2005

EXERCICE 1 **5 points**

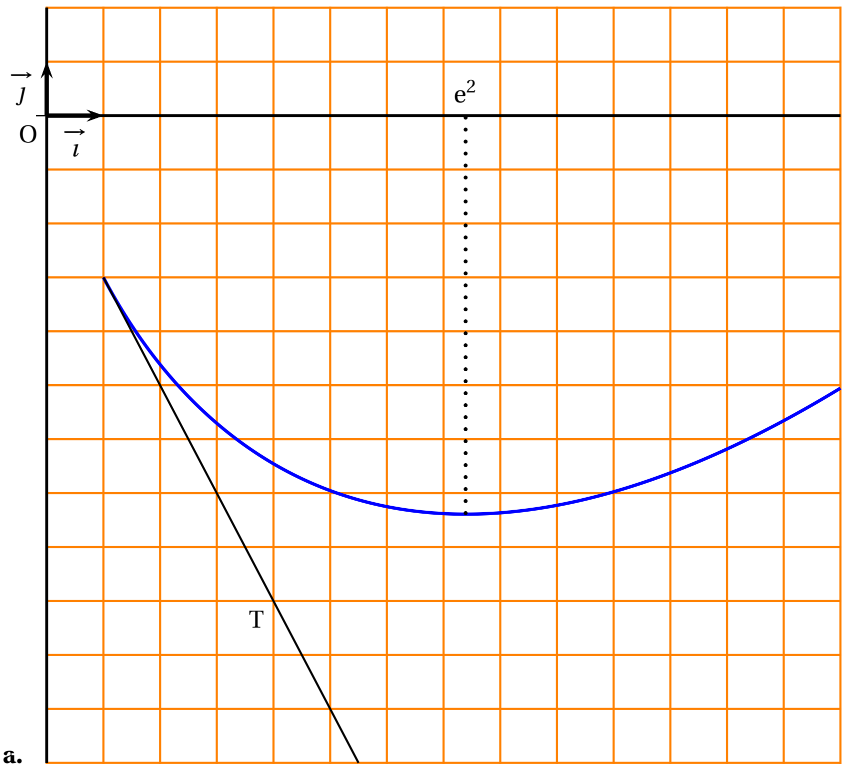
Un professeur d'Éducation Physique et Sportive s'adresse à un groupe de vingt élèves au sujet de leurs loisirs : intérêt pour le football dans la pratique de ce sport ou comme spectacle à la télévision.
Parmi ces vingt élèves, on sait que quinze regardent des matches à la television, huit pratiquent ce sport et cinq font les deux.

1. Montrer que deux élèves dans ce groupe ne s'intéressent au football ni dans la pratique, ni à la télévision.
2. Un élève de ce groupe est choisi au hasard.
   a. Quelle est la probabilité qu'il ne s'intéresse au football ni dans la pratique ni à la télévision ?
   b. Quelle est la probabilité qu'il s'intéresse au football à la télévision sans le pratiquer ?
3. On interroge au hasard un élève qui regarde les matches à la télévision.
   Quelle est la probabilité qu'il pratique le football ?
4. On attribue au hasard un numéro à chacun des vingt élèves. Une urne comporte 20 jetons avec les numéros en question.
   On tire deux fois au hasard un jeton en le remettant dans l'urne après le premier tirage.
   À chaque tirage, l'élève désigné gagne un billet d'entrée au match de son choix à condition qu'il pratique le football et le suive à la télévision.
   a. Déterminer le nombre total de tirages de deux jetons.
   b. Déterminer le nombre total de tirages permettant d'obtenir deux billets.
   c. Soit X la variable aléatoire définie par le nombre de billets gagnants.
   Définir la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

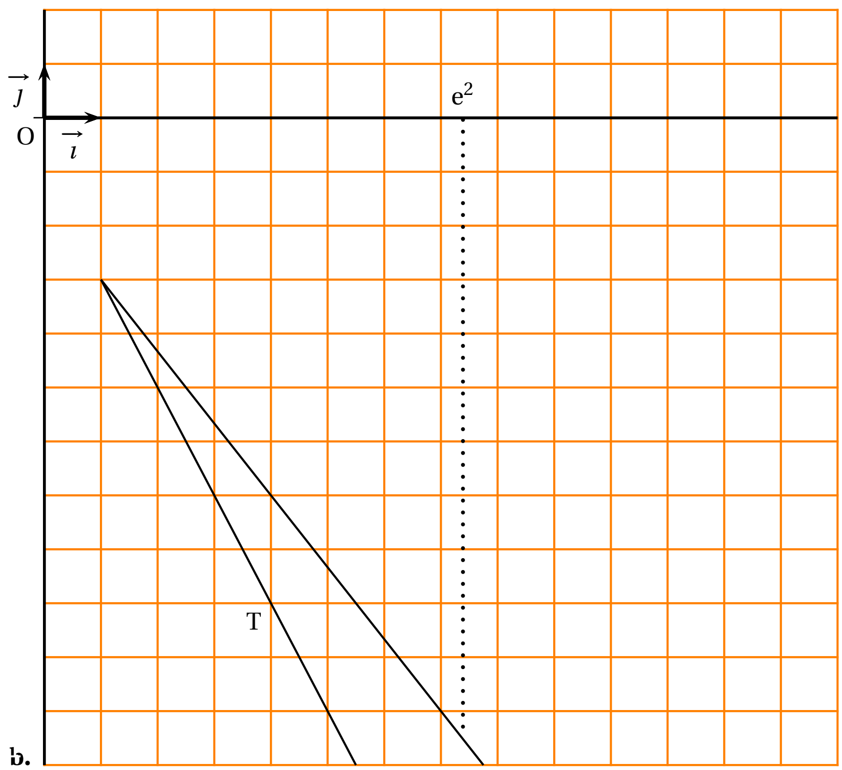
EXERCICE 2 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions suivantes, au moins une réponse est exacte. Indiquer la (ou les) réponse(s) exacte (s) sur votre copie. Aucune justification n'est demandée.

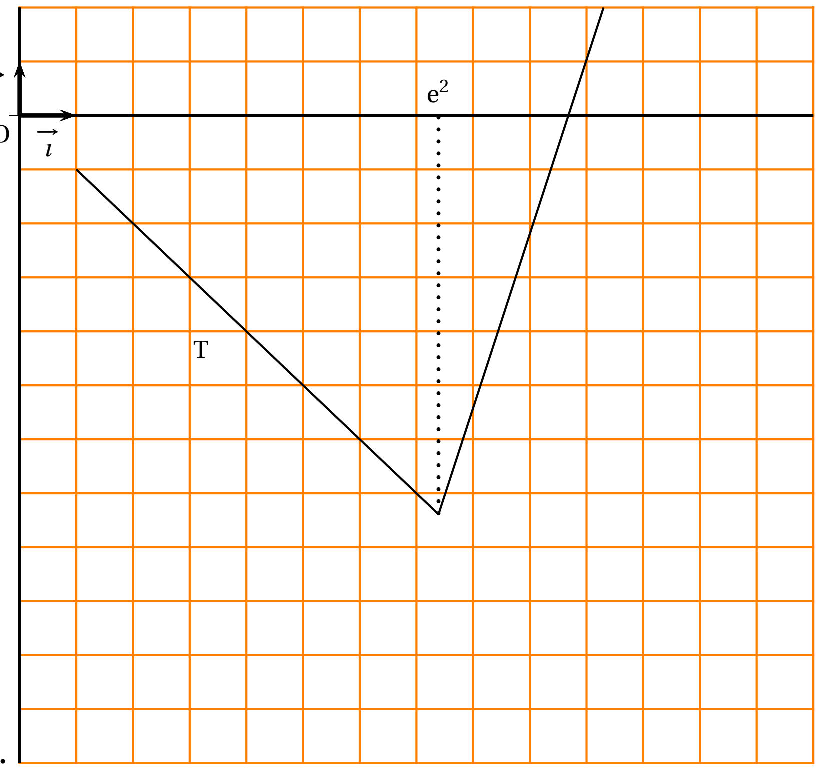
1. On considère l'équation différentielle $y' = -2 + \ln x$. Parmi les courbes ci-dessous, où la droite T représente chaque fois la tangente à la courbe considérée au point d'abscisse 1, quelle est celle susceptible de représenter une solution de cette équation différentielle ?



a.



b.



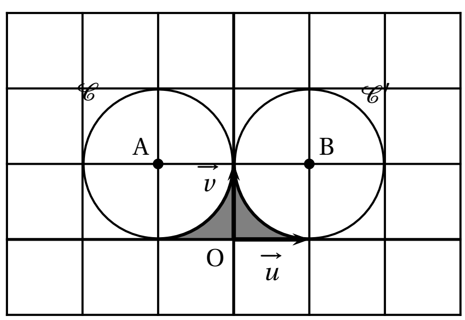
c.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $Z_{\text{A}} = -1 + \text{i}$ et $Z_{\text{B}} = I + \text{i}$.

On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon I et $\mathscr{C}'$ le cercle de centre B et de rayon I.

Soit n un entier naturel non nul et $Z_n = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\text{i}\right)^n$.

Pour quelles valeurs de n, parmi celles proposées ci-dessous, l'image de Z_n appartient-elle au domaine grisé ?



a. $n = 1$.

b. $n = 2$.

c. $n = 3$.

3. La solution particulière f, définie sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle

$$y'' + 9y = 0$$

telle que $f(\pi) = -\sqrt{3}$ et $f'(\pi) = 3$ est :

a. $f(x) = \sqrt{3}\cos(3x) - \sin(3x)$.

b. $f(x) = -\sqrt{3}\cos(3x) + 3\sin(3x)$.

c. $f(x) = 3\sin\left(\dfrac{x}{3}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$.
La valeur moyenne μ de la fonction f sur l'intervalle $[\ln 5\ ;\ \ln 10]$ est :

a. $\mu = \dfrac{2\ln 2}{75}$.

b. $\mu = \dfrac{75}{2\ln 5}$.

c. $\mu = \dfrac{75}{\ln 4}$.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 1 - 2\ln x.$$

1. On désigne par g' la fonction dérivée de g.
Déterminer $g'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
(L'étude des limites aux bornes de l'ensemble de définition n'est pas demandée.)
3. Calculer $g(1)$. En déduire que g est strictement positive sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\ln x.$$

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et par Γ la courbe d'équation $y = \ln x$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en zéro. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. On désigne par f' la fonction dérivée de f.

   a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif :

   $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}.$$

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. On définit sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, la fonction h par :

   $$h(x) = f(x) - \ln x.$$

   a. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction h.

   b. Étudier le signe de la fonction h sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la courbe Γ.
5. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.
6. Tracer les courbes $\mathscr{C}$, Γ et la droite Δ dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie C

1. Soit H la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, par :

$$H(x) = -\left(\frac{1+\ln x}{x}\right).$$

Montrer que H est une primitive de h sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. Soit α un nombre réel strictement supérieur à 1.
Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, en cm^2, du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, la courbe Γ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

3. Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.