Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Antilles-Guyane 13 septembre 2012 ∾
Génie électronique, électrotechnique & optique

EXERCICE 1 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule réponse proposée est correcte. Chaque bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse ou une absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.
On notera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit A le point d'affixe $z_A = \sqrt{2} + \text{i}\sqrt{6}$ et B le point d'affixe $z_B = -1$.

1. Le module et un argument de z_B sont respectivement

- -1 et 0
- -1 et π
- 1 et 0
- 1 et π

2. Une forme exponentielle de z_A est :

- $z_A = 2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$
- $z_A = 2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$
- $z_A = \sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$
- $z_A = \sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$

3. L'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ est le point A′ d'affixe :

- $z_{A'} = \left(1+\sqrt{3}\right) + \text{i}\left(1+\sqrt{3}\right)$
- $z_{A'} = \left(1+\sqrt{3}\right) + \text{i}\left(1-\sqrt{3}\right)$
- $z_{A'} = \left(1-\sqrt{3}\right) + \text{i}\left(1+\sqrt{3}\right)$
- $z_{A'} = \left(1-\sqrt{3}\right) + \text{i}\left(1-\sqrt{3}\right)$

4. La suite définie par $u_n = |z_A|^n$ pour tout entier naturel n :

- est arithmétique
- est géométrique
- n'est ni arithmétique, ni géométrique

EXERCICE 2 **5 points**

À la fin d'une émission de télévision, un jeu est organisé de la manière suivante.
Une question est posée et plusieurs réponses possibles sont données. Le joueur tape le numéro de la réponse qui lui semble correcte et l'envoie par l'intermédiaire d'un message électronique. La communication lui coûte alors 1? (on suppose que l'organisateur du jeu reçoit l'intégralité de cet euro).

- Si la réponse est fausse, le joueur a perdu.
- Si la réponse est correcte, un tirage au sort peut lui permettre de gagner un chèque d'une valeur de 50 €, ou une console de jeu d'une valeur de 300 €, ou un voyage d'une valeur de 1 000 €.

Au total, 16 lots sont à gagner : 10 chèques, 5 consoles et 1 voyage.
Une étude statistique indique que 1 % des joueurs n'ont pas la bonne réponse.

Partie A

On suppose que 1 000 personnes ont envoyé un message et que tous les lots ont été gagnés. On choisit une personne au hasard. Toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.
On désigne par :

R l'évènement « la personne choisie a donné une bonne réponse à la question » ;

G l'évènement « la personne choisie a gagné un lot ».

1. Donner la probabilité de l'évènement R.

2. Montrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\dfrac{2}{125}$.

3. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros d'un joueur pris au hasard. Par exemple, la valeur de X pour un joueur qui perd est -1.

a. Montrer que la probabilité de l'évènement « X prend la valeur 299 » est égale à $\dfrac{1}{200}$.

b. Donner toutes les valeurs prises par X.

c. Donner la loi de probabilité de X.

d. Montrer que l'espérance de X est 2.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 100. On suppose que n personnes ont envoyé un message et que tous les lots ont été gagnés. On choisit une personne au hasard. Toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.
Soit X_n la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros d'un joueur pris au hasard.

1. Donner, en fonction de n, la loi de probabilité de X_n.

2. Montrer que l'espérance de X_n est égale à $\frac{3000-n}{n}$.

3. Jusqu'à quelle valeur de n, le jeu est-il favorable à un joueur ?

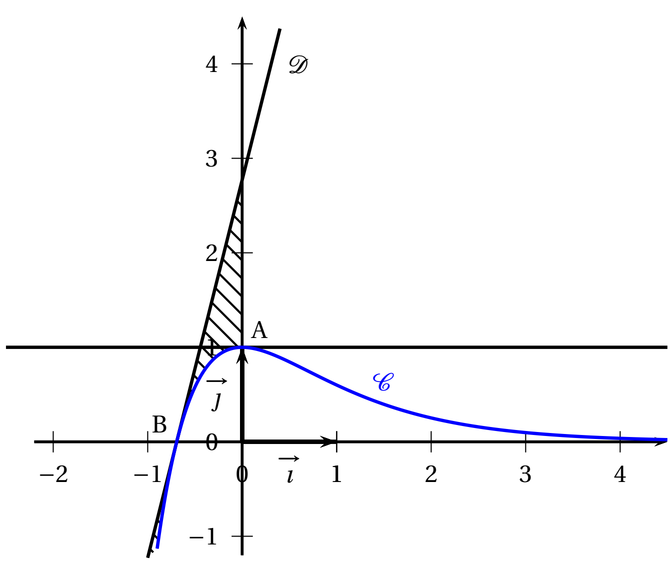
PROBLÈME **11 points**

On considère l'équation différentielle du second ordre :

$$(E): \quad y'' + 3y' + 2y = 0$$

où la fonction inconnue y de la variable x est définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ; y' désigne la fonction dérivée de y et y'' la fonction dérivée de y'.

Le but de ce problème est de déterminer et d'étudier une solution de l'équation différentielle (E).
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de cette solution est donnée ci-dessous.



Les parties B et C peuvent être traitées indépendamment de la partie A.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^{-2x}$, a et b étant deux constantes réelles.
La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessus est la courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ de la fonction f. Cette courbe passe par le point A(0 ; 1) et la tangente à $\mathscr{C}$ en A est parallèle à l'axe des abscisses.
On note f' la fonction dérivée de f.

1. **a.** Donner les valeurs exactes de $f(0)$ et $f'(0)$.
   b. En utilisant $f(x)$, exprimer $f(0)$ et $f'(0)$ en fonction de a et b.
   c. En déduire les valeurs de a et b.
2. Vérifier que la fonction f obtenue est effectivement une solution de l'équation différentielle (E).

Partie B

On considère la fonction f, étudiée dans la partie A, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}.$$

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée au début du problème.

1. Calculer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$.
   Donner une interprétation graphique de cette limite.
2. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 1\right)$, puis déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $-\infty$.
3. **a.** Montrer que $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-2x}\left(1 - \mathrm{e}^{x}\right)$ pour tout réel x.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1 - \mathrm{e}^{x} > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   c. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$, dans lequel on reportera les limites.

Partie C

L'objectif de cette partie est de déterminer l'aire du domaine hachuré sur le graphique donné au début du problème.

1. On désigne par B l'unique point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe (Ox).
   Montrer que l'abscisse du point B est $x_{\mathrm{B}} = -\ln(2)$.
2. **a.** Montrer que $f'(-\ln(2)) = 4$.
   b. En déduire qu'une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est :

$$y = 4x + 4\ln(2).$$

3. On considère la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (4x + 4\ln(2)) - f(x).$$

   On note g' la fonction dérivée de la fonction g. On admet que le signe de la fonction g' est donné Dar le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	

a. En déduire le tableau de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de la fonction g en $+\infty$ et en $-\infty$ ne sont pas demandées).

b. Montrer que $g(-\ln(2)) = 0$.

c. Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, on a $g(x) \geqslant 0$.

d. En déduire la position de la droite $\mathcal{D}$ par rapport à celle de la courbe $\mathcal{C}$.

4. **a.** Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = 2x^2 + (4\ln(2))x + 2\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$$

est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

b. On admet que l'aire, en unité d'aire, du domaine hachuré délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite $\mathcal{D}$ et les droites d'équations respectives $x = -\ln(2)$ et $x = 0$, est égale à $\displaystyle\int_{-\ln(2)}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Déterminer la valeur exacte de cette aire, en unité d'aire.