Baccalauréat STI – Nouvelle – Calédonie novembre 2004
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

1. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, résoudre l'équation d'inconnue z :

$$2z^2 + 10z + 25 = 0.$$

Écrire les solutions de cette équation sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel positif et θ un nombre réel.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, on considère le point A d'affixe $z_A = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i$, le point B d'affixe $z_B = -\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i$ et le point C d'affixe $z_C = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.

   a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(O~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$.

   b. Calculer le module de $z_A - z_B$ et celui de $z_B - z_C$. En déduire la nature du triangle ABC.

3. On appelle A′ et B′ les images respectives des points A et B par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{12}$ et on note $z_{A'}$ et $z_{B'}$ les affixes respectives de A′ et B′.

   a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes $z_{A'}$ et $z_{B'}$.

   b. Écrire les nombres complexes $z_{A'}$ et $z_{B'}$ sous forme algébrique.

   c. Placer les points A′ et B′ dans le repère $\left(O~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$. On expliquera la construction géométrique.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + \frac{1}{4}y = 0$, y désignant une fonction numérique définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

2. Déterminer la fonction f, solution de l'équation précédente, qui vérifie :
$f(0) = 2$ et $f'(0) = \sqrt{3}$.

3. Vérifier, que pour tout nombre réel x, $f(x) = 4\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$.

4. **a.** En utilisant l'équation différentielle (E), expliquer comment on peut obtenir la représentation graphique de f'', dérivée seconde de f, à partir de celle de f.

   b. Sur la feuille annexe est tracée la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0~;~4\pi]$. Tracer la représentation de f'' sur ce même graphique et sur ce même intervalle.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x + 1 - e^x.$$

1. Déterminer la dérivée h' de h.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $1 - e^x = 0$ et l'inéquation $1 - e^x > 0$. En déduire le sens de variation de la fonction h.

3. Calculer $h(0)$. Dresser le tableau de variations de h (on ne calculera pas les limites aux bornes de l'ensemble de définition).

4. Justifier que, pour tout nombre réel x, $h(x) \leqslant 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(-2x^2 - x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. En remarquant que, pour tout nombre réel x différent de 0, on a

$$f(x) = \left(-2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)x^2\mathrm{e}^{-x},$$

déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. **a.** Soit f' la dérivée de f. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \left(2x^2 - 3x - 2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous. On donnera les valeurs arrondies au centième.

x	$-1,3$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	2	3	4	6
$f(x)$										

5. On appelle A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0 et $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

a. Donner une équation de $\mathscr{T}$; on l'écrira sous la forme $y = g(x)$ où g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) - g(x) = (1 - 2x)h(x)\mathrm{e}^{-x}$, h étant la fonction étudiée dans le **partie A**.

c. Étudier suivant les valeurs du nombre réel x, le signe de $f(x) - g(x)$. En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{T}$.

6. Tracer $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$.

7. **a.** Déterminer des nombres réels a, b et c pour que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de la fonction f.

b. Calculer, en cm^3, la valeur exacte de l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.