Durée : 4 heures

Baccalauréat STI La Réunion juin 2008
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **6 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4z\sqrt{3} + 16 = 0.$$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 2\sqrt{3} + 2i \quad z_B = 2\sqrt{3} - 2i \text{ et } z_C = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

   a. Donner la forme algébrique du nombre complexe z_C.

   b. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A, z_B et z_C.

   c. En déduire que les points A, B et C appartiennent à un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

   d. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   e. Démontrer que le triangle ABC est un triangle isocèle.

3. On considère la rotation r de centre O qui transforme A en B.

   a. Vérifier que $\dfrac{z_B}{z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. En déduire l'angle θ de la rotation r.

   b. Préciser alors la nature du triangle OAB.

   c. Établir que le point C est l'image du point B par la rotation r.

   d. Préciser la nature du quadrilatère OABC.

EXERCICE 2 **4 points**

Un hôtel de vacances propose deux types de bungalow (bungalow avec kitchenette ou bungalow sans kitchenette) à louer à la semaine.
Pour les clients qui le souhaitent, l'hôtel propose deux formules de restauration au choix :

- Formule A : petit déjeuner seul,
- Formule B : petit déjeuner et diner.

Pour chaque semaine de location, chaque client décide s'il prend une formule de restauration et si oui, choisit entre les formules A et B.
Le gestionnaire de l'hôtel a constaté que sur 100 clients

- 44 clients ne prennent aucune formule de restauration.
- 60 clients optent pour un bungalow avec kitchenette et parmi ceux-ci, 10 % choisissent la formule B et 20 % la formule A.
- 35 % des clients ayant choisi un bungalow sans kitchenette prennent la formule A.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre de clients ayant choisi :	Bungalow avec kitchenette	Bungalow sans kitchenette	Total
Formule A			
Formule B	6		
Aucune formule de restauration		2	
Total			100

2. On interroge un client au hasard, au sujet de ses choix,
   a. Déterminer la probabilité de l'évènement E : « Le client a choisi la formule B ».
   b. Déterminer la probabilité de l'évènement F : « Le client a loué un bungalow sans kitchenette ».
   c. Déterminer la probabilité de l'évènement G : « Le client a loué un bungalow sans kitchenette ou a choisi la formule B ».
   d. Déterminer la probabilité de l'évènement H : « Le client a choisi une formule de restauration ».
3. La location d'un bungalow sans kitchenette à la semaine coûte 415? et celle d'un bungalow avec kitchenette 520 €. La formule A coûte 49 € à la semaine. La formule B coûte 154 € à la semaine.
   On appelle X la variable aléatoire qui à chacun des 6 choix possibles, associe le coût correspondant pour une semaine.
   a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
   b. Démontrer que la probabilité de l'évènement « X prend la valeur 520 » est égale à 0,42.
   c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   d. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
   e. Pour la prochaine saison, le gérant de l'hôtel pense qu'il louera dans les mêmes conditions 16 bungalows pendant 20 semaines. Quelle recette peut-il alors espérer ?

PROBLÈME **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
La représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ainsi qu'une droite $\mathscr{T}$ sont tracées dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan sur la feuille figurant en annexe.

- La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points de coordonnées $(-1\,;\,2)$ et $(0\,;\,4)$.
- La droite parallèle à l'axe des abscisses, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Partie A : étude graphique et détermination d'une fonction

1. Donner, les valeurs des nombres réels $f(0)$ et $f(-1)$.
2. Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en exactement deux points A_0 et A_1 d'abscisses respectives x_0 et x_1 avec $x_0 < x_1$, préciser à l'aide du graphique le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.
3. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a. Déterminer graphiquement $f'(0)$.
   b. Déterminer par lecture graphique le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x appartenant à l'intervalle $[-1\,;\,2]$.

4. On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x, on ait :

$$f(x) = (x+a)\mathrm{e}^{-x} + bx^2 + 3.$$

En utilisant les résultats trouvés à la question 1, déterminer les nombres réels a et b.

Partie B : étude de la fonction f sans utilisation du graphique

On admet maintenant que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x} - x^2 + 3.$$

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

2. En remarquant que $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} - x^2 + 3$, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

3. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = -x\left(\mathrm{e}^{-x} + 2\right)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du réel x et dresser le tableau de variation de f.

4. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
Cette solution est l'abscisse x_1 du point A_1 définie dans la partie A question 2.

b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du nombre réel x_1.

Partie C : calcul d'une aire

1. **a.** On considère les fonctions g et G définies sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad G(x) = (-x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

Démontrer que la fonction G est une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On désigne par $\mathscr{P}$ la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

On appelle $\mathscr{A}$ la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire de la partie $\mathscr{P}$. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis en donner la valeur décimale arrondie au centième.

Feuille annexe