∽ Baccalauréat STI La Réunion juin 2003 ∾
Génie électronique, électrotechnique, optique

Durée de l'épreuve : 4 heures — Coefficient : 4

La candidat traitera obligatoirement les deux exercices et le problème

EXERCICE 1 **5 points**

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm, on considère trois points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 1 + \text{i}\sqrt{3}, \quad z_{\text{B}} = 1 - \text{i}\sqrt{3}, \quad z_{\text{C}} = l.$$

a. Déterminer la forme trigonométrique de z_{A} et z_{B}.

b. Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Justifier l'alignement de ces points et tracer la droite correspondante.

2. Soient A′ et B′ les points du plan d'affixes respectives

$$z_{\text{A}'} = \frac{1}{z_{\text{A}}} \text{ et } z_{\text{B}'} = \frac{1}{z_{\text{B}}}.$$

a. Donner la forme exponentielle de z_{A} et z_{B}.

b. Calculer la forme algébrique de $z_{\text{A}'}$ et $z_{\text{B}'}$

c. Placer les points A′ et B′ sur le même schéma que précédemment.

d. Préciser l'image de A′ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

3. a. Placer, sur le schéma précédent, le point I d'affixe $z_{\text{I}} = \dfrac{1}{2}$ et calculer les distances IA′, lB′ et IC

b. En déduire que les points A′, B′ et C sont situés sur un cercle dont on donnera le centre et le rayon.
Tracer ce cercle sur le même schéma.

EXERCICE 2 **5 points** ‘

Une urne contient une boule rouge R, deux boules blanches B_1 et B_2, et deux boules noires N_1 et N_2 toutes indiscernables au toucher.
Un jeu consiste à tirer jeux boules successivement, sans remise.

1. En utilisant un arbre on un tableau, déterminer les 20 tirages possibles.
On admet par la suite que ces 20 tirages sont équiprobables.

2. Calculer la probabilité des évènements suivants :
A : « tirer deux houles de même couleur » ;
B : « tirer au plus une boule noire ».

3. Lots du tirage de deux boules :
— la boule rouge obtenue fait gagner 3 €,
— chaque boule blanche obtenue fait gagner 2 €,
— chaque boule noire obtenue fait perdre 3 €.
On appelle X la variable aléatoire qui à tout tirage de deux boules, associe le gain, en euros, du joueur (une perte est considérée comme un gain négatif).

a. Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour X ?

b. Écrire la loi de probabilité de X.

c. Calculer la probabilité P pour que le gain soit strictement positif.

d. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.

PROBLÈME — 10 points

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques. 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right)\text{e}^{-x}.$$

On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. En écrivant $f(x)$ sous la forme $f(x) = x^2\text{e}^{-x} - 2x\text{e}^{-x} + \text{e}^{-x}$, déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (Γ) ?

2. a. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et montrer que pour tout réel x :

$$f'(x) = \left(-x^2 + 4x - 3\right)\text{e}^{-x}.$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

c. Dresser le tableau de variations de f. On donnera la valeur exacte des extremums.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (Γ) en son point A d'abscisse 0.

4. Tracer la courbe (Γ) et la tangente (T).

Partie B

On s'intéresse dans cette partie à l'équation $f(x) = \dfrac{1}{8}$.

1. En utilisant le tableau de variations de la fonction f, justifier que cette équation admet trois solutions dans $\mathbb{R}$ et que l'une des solutions notée α appartient à l'intervalle $[1 ; 3]$.

2. à l'aide d'une calculatrice, donner un encadrement d'amplitude $0,1$ de la solution α.

Partie C

Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = x^2\text{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x$.