Durée : 4 heures

Baccalauréat STI La Réunion juin 2006
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **4,5 points**

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes et i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 4z + 16 = 0.$$

2. On considère les nombres complexes :

$$z_1 = 2 + 2\text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = 2 - 2\text{i}\sqrt{3}.$$

   a. Déterminer le module et un argument de z_1.

   b. écrire z_1, puis z_2 sous forme exponentielle.

3. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité 1 cm.

   On considère la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$.

   a. Placer les points M_1, et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

   b. Montrer que le point M_2 est l'image du point M_1 par la rotation r.

   c. On appelle M_3 le point image du point M_2 par la rotation r.
   Calculer l'affixe z_3 du point M_3.
   Placer le point M_3 dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

   d. Démontrer que le triangle $\text{M}_1\,\text{M}_2\text{M}_3$ est équilatéral.

4. Vérifier que les nombres complexes $(z_1)^6$ et $\dfrac{(z_1)^4}{(z_2)^2}$ sont des entiers naturels.

   On utilisera la forme de z_1 et z_2 la plus adaptée.

EXERCICE 2 **4,5 points**

I. On considère l'équation différentielle :

$$(\text{E}_0) \quad : \quad y'' + 4y = 0$$

où y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et y'' sa dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation (E_0).
2. Déterminer la solution particulière f de (E_0) vérifiant :

$$f(0) = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad f'(0) = 2$$

   où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3. Montrer que pour tout réel t, $f(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(t) = 2\cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right).$$

4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

II. On considère maintenant l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_1) \quad : \quad y'' + 4y = 3\sin t$$

où y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$, et y'' sa dérivée seconde.

1. Montrer que si une fonction g est solution de l'équation (E_0), alors la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(t) = g(t) + \sin t$ est solution de l'équation (E_1).
2. Donner une solution particulière, ne s'annulant pas pour $t = 0$, de l'équation (E_1).

PROBLÈME **11 points**

Sur la feuille annexe, **qui doit être remise avec la copie**, on donne, dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$.

Partie A : détermination de la fonction *f*

On suppose que la courbe passe par le point A de coordonnées $\left(3\,;\,-\frac{7}{2} + 3\ln 2\right)$.
La droite D d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.
On note f' la fonction dérivée de f.

1. Quelle est la valeur exacte de $f(3)$?
2. Donner sans justification la limite de la fonction f en 2.
3. On suppose que, pour tout réel x de l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$,

$$f(x) = ax - 5 + 3\ln(x-1) - 3\ln(x-2).$$

   En utilisant la réponse de la question 1, déterminer algébriquement le nombre a.

Partie B : étude de la fonction *f*

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln(x-1) - 3\ln(x-2).$$

1. **a.** Retrouver par le calcul la limite de la fonction f en 2.

   b. Montrer que, pour tout x réel de l'intervalle $]2 + \infty[$

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right).$$

   c. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x - 5$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$. Tracer Δ sur la feuille annexe.

3. **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]2~;~+\infty[$

$$f'(x) = \frac{x^2-3x-4}{2(x-1)(x-2)}.$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]2~;~+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]2~;~+\infty[$.

4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2,1~;~3]$ et une solution unique β dans l'intervalle $[9~;~10]$.

b. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune des solutions α et β.

Partie C : calcul d'aire

1. On considère les fonctions h et H définies sur l'intervalle $]2~;~+\infty[$ par

$$h(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \quad \text{et} \quad H(x) = (x-1)\ln(x-1) - (x-2)\ln(x-2).$$

a. Montrer que la fonction H est une primitive de la fonction h sur l'intervalle $]2~;~+\infty[$.

b. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]2~;~+\infty[$.

2. On considère le domaine $\mathcal{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 9$.

a. Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique de la feuille annexe.

b. On note $\mathcal{A}$ la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine $\mathcal{D}$. Exprimer $\mathcal{A}$ sous la forme d'une intégrale.

c. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Courbe de la fonction f