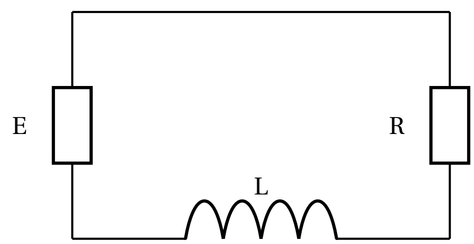
Baccalauréat STI Métropole septembre 1999
Génie électronique

Durée : 4 heures | Coefficient : 4

EXERCICE 1 **5 points**

Un circuit comprend en série un générateur de force électromotrice E, une bobine d'inductance L et une résis- tance R.
L'intensité du courant électrique i, exprimée en ampères, est fonction du temps t, exprimé en secondes, et est solution de l'équation différentielle (1) :



$$\mathrm{L}i'(t) + \mathrm{R}i(t) = \mathrm{E}.$$

On donne L = 0,2 H ; R = 100 Ω ; E = 10 V.

1. Écrire l'équation différentielle (1) en remplaçant L, R et E par leurs valeurs.
2. Résoudre l'équation différentielle (2) : $\dfrac{1}{5}y' + 100y = 0$.
3. Vérifier que la fonction i définie sur $\mathbb{R}$ par $i(t) = -\dfrac{1}{10}\mathrm{e}^{-500t} + \dfrac{1}{10}$ est solution de l'équation différentielle (1).
4. Étudier sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ les variations de la fonction i définie à la question 3.
   Dresser le tableau de variations de i sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$; préciser la limite de i en $+\infty$.
5. Déterminer par le calcul l'instant t_1 à partir duquel l'intensité $i(t)$ sera supérieure à $0,095$ A.
   En donner la valeur exacte puis la valeur décimale approchée à 10^{-3} près par excès.

EXERCICE 2 **5 points**

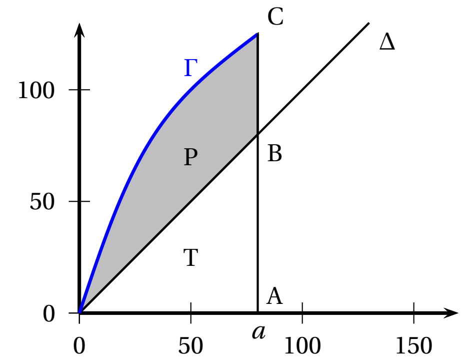
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Soit A le point d'affixe : $z_{\mathrm{A}} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Calculer le module et un argument de z_{A}. En déduire la forme exponentielle du nombre complexe z_{A}. Placer le point A avec précision dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
2. Soit B l'image du point A par la rotation de centre 0 et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. On appelle z_{B} l'affixe du point B.
   Calculer z_{B} sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
   Placer le point B avec précision dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
3. Quelle est la nature du triangle AOB ?
4. Soit C l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et z_{C} son affixe.
   a. Placer le point C avec précision dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
   b. Calculer z_{C} sous forme exponentielle.
   c. Montrer que $z_{\mathrm{C}} = z_{\mathrm{A}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. En déduire une forme algébrique de z_{C}.

d. Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

PROBLÈME **10 points**

La figure ci-contre représente la voile d'un bateau constituée par la réunion des parties P et T. Les distances sont exprimées en dm et le repère est orthonormal.
La Courbe Γ représente la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :
$g(x) = x + \dfrac{5000x}{x^2+2500}$. La droite Δ a pour équation $y = x$.



a étant un nombre appartenant à l'intervalle $[50\ ;\ 100]$:

- P est l'ensemble des points dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient $0 \leqslant x \leqslant a$ et $x \leqslant y \leqslant g(x)$;
- T est l'ensemble des points dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant x$. La droite d d'équation $x = a$ coupe l'axe des abscisses, la droite Δ et la courbe Γ respectivement aux points A, B et C.

Le but du problème est de déterminer, si elle existe, la valeur de a pour laquelle les aires de P et de T sont égales.

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = g(x) - x$.

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction h. Que représente la droite Δ pour la courbe Γ ?
2. En utilisant le signe de $h(x)$ étudier la position relative de la courbe Γ et de la droite Δ.

Partie B

On rappelle que la fonction h est définie par : $h(x) = \dfrac{5000x}{x^2+2500}$.

1. Déterminer une primitive H de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Montrer que l'aire $\mathscr{A}(a)$ de la partie P est :

$$\mathscr{A}(a) = 2500\left[\ln\left(a^2+2500\right) - \ln 2500\right].$$

3. Calculer, en fonction de a, l'aire $\mathscr{B}(a)$ de la partie T.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 2500\ln\left(x^2+2500\right) - 2500\ln 2500 - \frac{1}{2}x^2.$$

1. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f. (on admettra que la limite en $+\infty$ de f est $-\infty$.)
   c. Dans le repère orthogonal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 1 cm pour 10 dm sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 dm^2 sur l'axe des ordonnées), construire la représentation graphique de la fonction f.
2. **a.** Montrer que sur l'intervalle $[50\ ;\ 100]$ l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution, notée α. Déterminer un intervalle d'amplitude 10^{-1} contenant le réel α.
   b. Quelle est l'interprétation géométrique de ce nombre α ?
   c. Déterminer alors une valeur décimale approchée de l'aire de chacune des parties P et T en prenant 79,3 comme valeur décimale approchée de α.