Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Métropole 22 juin 2010
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$

1. Soit $P(z) = z^3 - 27$, où z désigne un nombre complexe.
   a. Vérifier que $P(z) = (z-3)\left(z^2+3z+9\right)$.
   b. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$$z_{\text{A}} = 3,\quad z_{\text{B}} = -\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}\quad \text{et}\quad z_{\text{C}} = -\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}.$$
   a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_{B} et z_{C}.
   b. Écrire le nombre complexe z_{C} sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.
   c. Justifier que les points A, B et C sont sur un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.
   d. Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
3. Le point D est l'image du point C par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. On appelle z_{D} l'affixe du point D.
   Montrer que $z_{\text{D}} = -3$, puis placer le point D sur la figure précédente.
4. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité : $|z+3| = 3$.
   a. Vérifier que les points O, B et C appartiennent à l'ensemble $\mathscr{F}$.
   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   L'ensemble $\mathscr{F}$ est l'image du cercle Γ par certaines transformations du plan.
   En citer une et préciser ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 2 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.
Chaque bonne réponse rapporte 1 *point et chaque mauvaise réponse enlève* 0,5 *point. Une absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à* 0.
On notera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie.

Partie A

Deux machines A et B produisent un même type de pièce. On a prélevé 3 000 unités sortant de la machine A et 2 000 de la machine B.
Ces pièces peuvent présenter deux types de défauts : un défaut de couleur, noté C, et un défaut de taille, noté T.
Pour la machine A, 2 % des pièces présentent uniquement le défaut C, 5 % uniquement le défaut T et 1 % les deux défauts.
Pour la machine B, 3 % présentent le seul défaut C, 4 % le seul défaut T et 2 % les deux défauts.
On pourra éventuellement se servir du tableau ci-dessous

	C seul	T seul	C et T	ni C ni T	Total
A			30		3 000
B	60				2 000
Total					5 000

On prend au hasard une pièce parmi les 5 000 prélevées ; toutes les pièces ont la même chance d'être choisies.

1. La probabilité que la pièce soit fabriquée par la machine A est :

   a. $\frac{2}{3}$ **b.** $\frac{3}{5}$ **c.** $\frac{3}{2}$ **d.** $\frac{2}{5}$

2. La probabilité que la pièce présente uniquement le défaut C est :

   a. $0,024$ **b.** $0,02$ **c.** $0,03$ **d.** 120

3. La probabilité que la pièce présente le défaut T est :

   a. $\frac{23}{500}$ **b.** $\frac{3}{50}$ **c.** $\frac{7}{500}$ **d.** $\frac{1}{20}$

4. La probabilité que la pièce présente au moins l'un des deux défauts est :

   a. $0,014$ **b.** $0,06$ **c.** $0,038$ **d.** $0,084$

Partie B

L'entreprise décide de commercialiser les 5 000 pièces prélevées :

- les pièces présentant les deux défauts sont invendables et sont détruites ;
- les pièces présentant uniquement un défaut de taille sont bradées au prix de 10 € chacune ;
- celles présentant uniquement un défaut de couleur sont soldées au prix de 25 € chacune ;
- enfin les pièces correctes sont vendues au prix de 30 € chacune.

Sachant que le coût de fabrication d'une pièce est de 10 €, on considère la variable aléatoire X égale au bénéfice fait par l'entreprise sur chaque pièce, exprimé en euros.

5. L'entreprise peut espérer un bénéfice moyen, exprimé en euros, de :

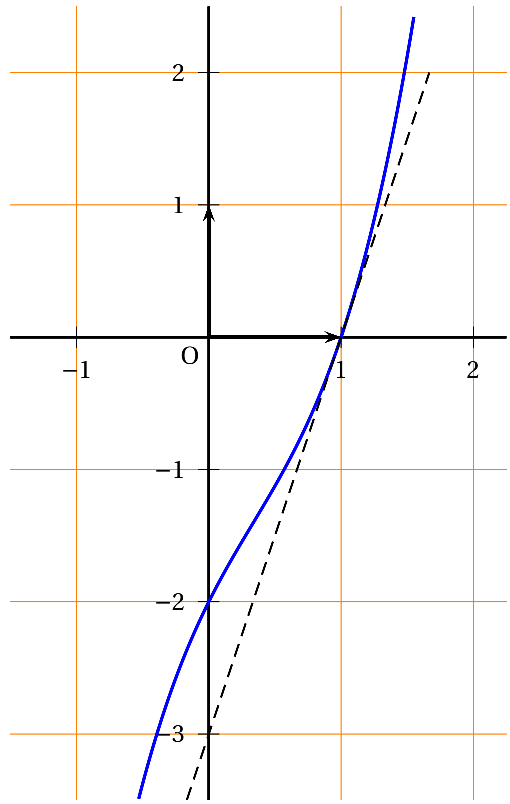
   a $18,68$ **b** $18,54$ **c** $18,89$ **d** $18,75$

PROBLÈME **10 points**

Partie A : exploitation d'un graphique

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ où a et b désignent deux nombres réels.
On suppose g strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Cette courbe coupe les axes de coordonnées aux points A$(1\,;\,0)$ et B$(0\,;\,-2)$.
La droite en pointillés est la tangente à la courbe au point d'abscisse 1. Elle coupe l'axe des ordonnées au point C$(0\,;\,-3)$.

1. Lire $g(1)$ sur le graphique.
   En déduire une relation entre a et b.
2. Donner la valeur de $g'(1)$.
   Écrire alors une relation vérifiée par a.
3. À l'aide des deux premières questions, déterminer les valeurs de a et b.
4. Donner le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.



Dans la suite, on admettra que : $g(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$.

Partie B : étude d'une fonction

On considère maintenant la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,5]$ par :

$$f(x) = 4\ln x + x^2 - 2x + 1 + \frac{4}{x}.$$

Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$.
   En remarquant que, pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,5]$,
   $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(4x\ln x + x^3 - 2x^2 + x + 4\right)$, déterminer la limite de la fonction f en zéro et interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,5]$, $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x^2}$ où g est la fonction définie dans la partie A.
   En déduire le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

Partie C : position relative de deux courbes

Dans la question 1. on demande de conjecturer des résultats à partir de la calculatrice; dans la question 2. on demande de prouver ces résultats.

1. Sur l'écran de la calculatrice, on fera apparaître la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f, ainsi que l'hyperbole Γ d'équation $y = \dfrac{4}{x}$.

Les résultats attendus dans cette question seront obtenus à partir de la lecture d'écran.

a. Faire un schéma reproduisant l'écran obtenu en précisant la fenêtre utilisée.

b. Les courbes $\mathscr{C}$ et Γ semblent avoir un point commun. Donner ses coordonnées.

c. Préciser la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à Γ.

2. On considère la fonction d définie sur l'intervalle $]0~;~5]$ par :

$$d(x) = f(x) - \frac{4}{x}.$$

a. À l'aide de la question précédente, proposer une solution de l'équation $d(x) = 0$ et, à l'aide d'un calcul, opérer une vérification.

b. Calculer $d'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction d.

c. En déduire le signe de $d(x)$ sur l'intervalle $]0~;~5]$.

d. La position de $\mathscr{C}$ par rapport à Γ précisée à la question 1. c. est-elle confirmée ?

Partie D : calcul d'aire

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0~;~5]$ par : $H(x) = x\ln x - x$.

Montrer que H est une primitive de la fonction ln sur l'intervalle $]0~;~5]$.

2. Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la courbe Γ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 1$. Le résultat sera donné en unités d'aire.