Baccalauréat STI Métropole juin 2000
Génie électrotechnique, électronique, optique

Durée : 4 heures — Coefficient : 4

EXERCICE 1 — **4 points**

Un test d'aptitude consiste à poser à chaque candidat une série de quatre questions indépendantes. Pour chacune d'elles, deux réponses sont proposées dont une et une seule est correcte.
Un candidat répond chaque fois au hasard (on suppose donc l'équiprobabilité des réponses).

1. On note V une réponse correcte et F une réponse incorrecte : VFFV signifie que la première et la quatrième réponse sont correctes et la deuxième et la troisième sont incorrectes.
Établir la liste des seize résultats possibles (que l'on pourra présenter à l'aide d'un arbre).

2. Quelle est la probabilité pour que le candidat donne la bonne réponse :

a. à la première question posée ?

b. à une seule des questions posées ?

c. aux quatre questions posées ?

3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses correctes données par le candidat.

a. Donner les différentes valeurs prises par X.

b. Donner la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

4. Un candidat sera reconnu apte s'il donne au moins trois réponses correctes. Quelle est la probabilité qu'un candidat répondant au hasard soit reconnu apte ?

EXERCICE 2 — **4 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

On considère les nombres complexes $z_{\text{A}} = 5 - 5\text{i}$ et z_{B} de module égal à $5\sqrt{2}$ et d'argument égal à $-\dfrac{7\pi}{12}$, d'images respectives A et B.

1. a. Placer le point A.

b. Calculer le module et un argument de z_{A}.

2. Soit la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

a. Quelle est la transformation géométrique associée à f.

b. Montrer par le calcul que $f\left(z_{\text{A}}\right) = z_{\text{B}}$.

c. En déduire la construction de B (on laissera les traits de la construction).

3. a. Exprimer $\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$ sous forme algébrique.

b. Calculer $f\left(z_{\text{A}}\right)$ sous forme algébrique.

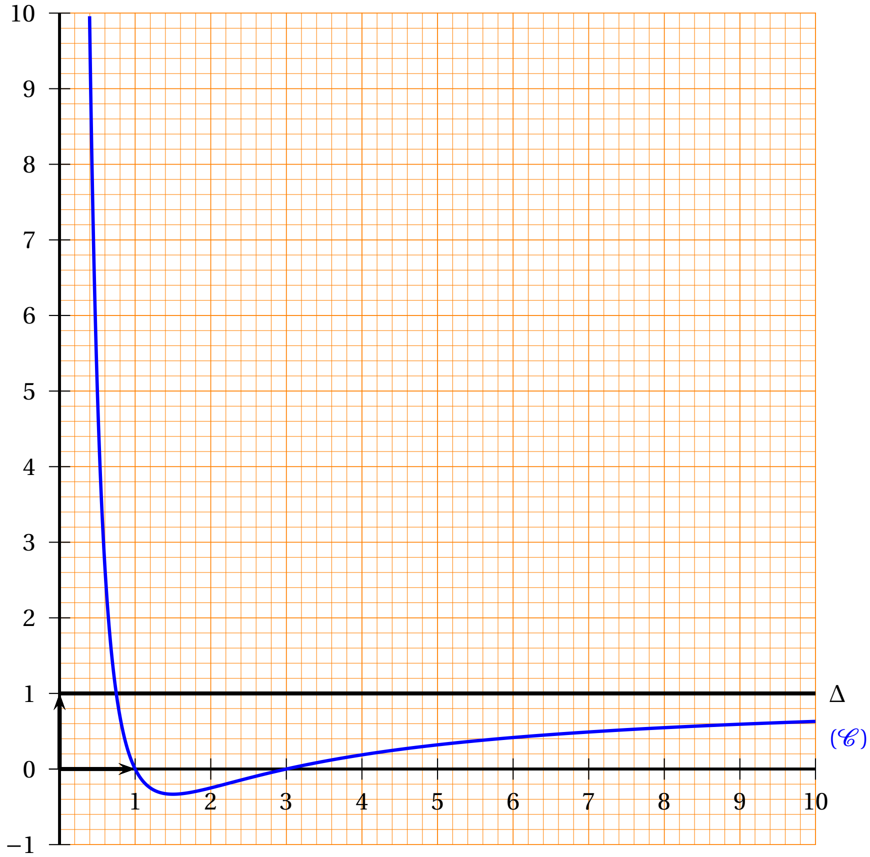
c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{-7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{-7\pi}{12}\right)$.

PROBLÈME — **12 points**

Les trois parties du problème peuvent être traitées séparément.

Partie A : Exploitation d'un graphique

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, dont la représentation graphique $(\mathscr{C})$ obtenue sur l'écran d'une calculatrice est donnée sur la figure (1) ci-dessous.



On précise que la courbe $(\mathscr{C})$ ne coupe l'axe des abscisses qu'en deux points et qu'elle admet l'axe des ordonnées et la droite (Δ) qui est parallèle à l'axe des abscisses comme asymptotes :

I À partir de cette représentation graphique :

1. déterminer :
   a. la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0 ;
   b. la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
2. dresser un tableau donnant le signe de $g(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

II On admet que : $g(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2}$ où $a,\ b$ et c sont trois nombres réels.

1. En calculant la limite de $\dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2}$ lorsque x tend vers l'infini, montrer que $a = 1$.
2. Lire $g(1)$ et $g(3)$ sur le graphique et en déduire un système de deux équations permettant d'obtenir b et c.
3. Résoudre ce système et exprimer $g(x)$ en remplaçant $a,\ b$ et c par leurs valeurs.

Partie B : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{3}{x} - 4\ln x + x.$$

1. **a.** En mettant x en facteur dans l'expression de $f(x)$, montrer que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$.

   b. En mettant $\frac{1}{x}$ en facteur dans l'expression de $f(x)$, montrer que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à $-\infty$. (On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = 0$.)

2. **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = g(x)$.

   b. Utiliser les résultats de la **partie A** pour en déduire le tableau de variation de f.

   c. Calculer les valeurs exactes de $f(1)$ et $f(3)$.

II En utilisant le tableau de variations de f, justifier que l'équation $f(x) = 0$

1. **a.** n'admet pas de solution dans l'intervalle $]0\,;\,3[$,

   b. admet une solution unique, notée x_0 dans l'intervalle $[3\,;\,10]$,

   c. n'admet pas de solution dans l'intervalle $]10\,;\,+\infty[$.

2. Compléter le tableau (document à rendre avec votre copie) et en déduire un encadrement d'amplitude 10^{-2} de x_0.

Partie C : Calcul d'aires

1. Montrer que $f(\sqrt{3}) = -2\ln 3$ (détailler les calculs sur votre copie).

2. Le tracé de la courbe $(\mathscr{C})$ représentant g dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ est donné sur la figure (2). (Document à rendre avec votre copie).

   a. Soit D le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $(\mathscr{C})$ d'une part et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = 3$ d'autre part.
   Calculer la valeur exacte de son aire A exprimée en unités d'aires. (On rappelle que $g = f'$).

   b. Tracer la droite (L) d'équation $x = \sqrt{3}$ et montrer qu'elle partage le domaine D en deux domaines d'aires égales.

DOCUMENT À RENDRE AVEC LA COPIE

Tableau à compléter (partie B 2)

x	$9,15$	$9,16$	$9,17$	$9,18$	$9,19$	$9,20$	$9,21$	$9,22$	$9,23$	$9,24$	$9,25$
$f(x)$											

Figure 2