Baccalauréat STI Métropole septembre 2000
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 - 6z + 12 = 0.$$

2. a. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm, placer les points A et B images respectives des nombres complexes $z_{\text{A}} = 3 + \text{i}\sqrt{3}$ et $z_{\text{B}} = \overline{z_{\text{A}}}$ où $\overline{z_{\text{A}}}$ désigne le nombre complexe conjugué de z_{A}.

   b. Écrire z_{A} et z_{B} sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ avec $r > 0$ et θ réel.

3. a. Calculer $\dfrac{z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}}$.

   b. En déduire que $z_{\text{B}} = z_{\text{A}}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et interpréter géométriquement ce résultat.

4. On pose : $z' = z - 2 + \text{i}\sqrt{3}$. On note T la transformation géométrique du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z'.

   a. Caractériser cette transformation T.

   b. Calculer l'affixe z_{D} de l'image D du point A par cette transformation.

   c. Calculer l'affixe du point C tel que ABCD soit un parallélogramme.

   d. Compléter la figure en plaçant C et D.

EXERCICE 2 **4 points**

Soient I et J les intégrales définies par :

$$\text{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{e}^{-x} \sin x \, \text{d}x \qquad \text{et} \qquad \text{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{e}^{-x} \cos x \, \text{d}x.$$

1. Soit f et u les fonctions définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \text{e}^{-x}(\cos x - \sin x) \qquad \text{et} \qquad u(x) = \text{e}^{-x} \sin x.$$

   a. Montrer que u est une primitive de f.

   b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\text{K} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, \text{d}x$.

2. a. Déterminer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

   b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale J.

3. a. Déterminer une relation entre I, J et K.

   b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 + x + 2\right) \text{e}^{\frac{x}{2}}.$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité : 2 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. En remarquant que :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)x^2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

   et en admettant que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right) = 0$, déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour $(\mathscr{C})$?

2. **a.** Calculer $f'(x)$. Montrer que :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 5x + 4\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

   b. Étudier le signe de $f'(x)$.
   En déduire le tableau de variations de f.

3. Déterminer une équation de la droite (D), tangente à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse -2.

4. Recopier et compléter le tableau de valeurs :

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1
$f(x)$										

   Les valeurs de $f(x)$ seront arrondies avec deux décimales.
   Représenter (D) puis $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}},$$

   où a, b et c sont des constantes réelles.
   Calculer $g'(x)$. Déterminer les nombres a, b et c pour que g soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

6. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-4~;~0]$.