Baccalauréat STI La Réunion septembre 2002
Génie électronique électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **4 points**

Dans l'urne A sont disposées 3 boules jaunes portant les indications + 3 ; −3 ; 1.
Dans l'urne B sont disposées 3 boules vertes portant les indications + 3i ; −3i ; i.
On tire une boule jaune puis une boule verte ; cela permet d'obtenir un nombre complexe z.
(Par exemple si on tire la boule jaune marquée 3 puis la boule verte marquée, i, le résultat est le nombre complexe $z = 3 + \mathrm{i}$.

1. Quels sont les différents résultats possibles ?

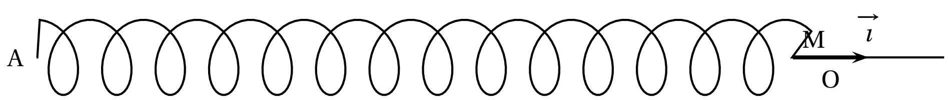
   On suppose dans tout, la suite que chacun de ces résultats a la même probabilité d'être obtenu.
2. Quelle est la probabilité p_1 que le nombre complexe obtenu ait un module égal à $3\sqrt{2}$.
3. Soit les quatre tirages z_A, z_B, z_C et z_D,de module $3\sqrt{2}$ et A, B, C et D les points d'affixes correspondantes.

   Représenter sur votre copie ces quatre points dans un plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique 2 cm) et montrer que A, B, C et D sont les sommets d'un carré.
4. On gagne la somme S, en euros, égale au carré du module du nombre complexe obtenu. Par exemple si le complexe obtenu est $z = 3 + \mathrm{i}$ alors $|z|^2 = 10$ et la somme S est 10 euros.

   Quelle est la loi de probabilité de S et quelle est l'espérance de gain au cours d'une partie ?

EXERCICE 2 **4 points**

Aucune connaissance de physique n'est nécessaire pour résoudre cet exercice



Un ressort à spires est attaché à son extrémité fixe A. On attache un mobile à son autre extrémité M. On admet que l'abscisse du point M dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ vérifie l'équation différentielle du second ordre (E) $\quad y'' + 9y = 8\sin t$, où y est une fonction du temps t (variable réelle positive).

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'' + 9y = 0$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(t) = A.\cos 3t + B.\sin 3t + \sin t \quad (A \text{ et } B \text{ réels})$$

   est une solution de l'équation différentielle (E).
3. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le ressort étant compressé, le mobile passe en O avec une vitesse de 4 m.s^{-1}.

   On considère la fonction h définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(t) = A.\cos 3t + B.\sin 3t + \sin t.$$

   Déterminer A et B pour que h soit la solution de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales : $h(0) = 0$ et $h'(0) = 4$.

4. On admet dans cette question que :

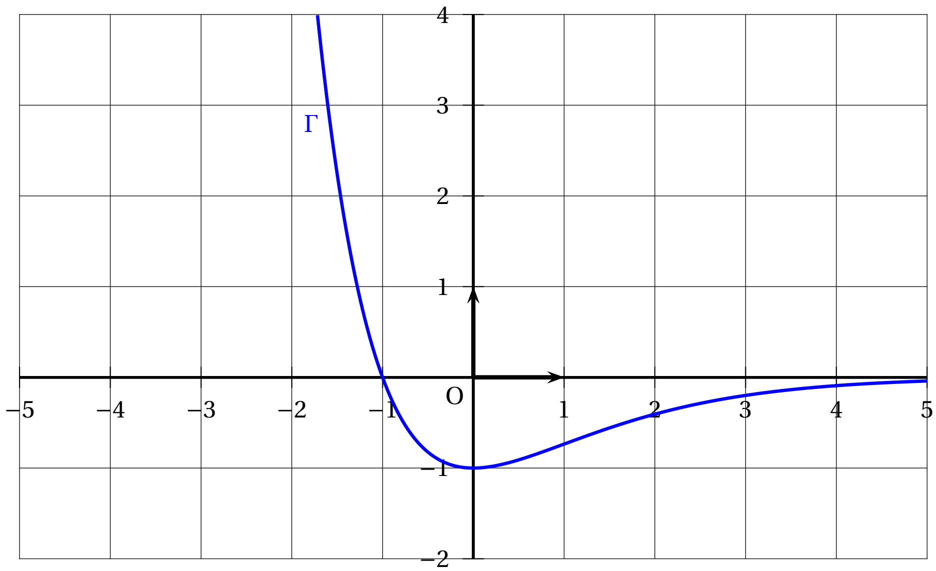
$$\sin 3t = -4\sin^3 t + 3\sin t.$$

Chercher les instants t où le mobile repasse par le point de départ, c'est-à-dire résoudre dans l'ensemble $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation $h(t) = 0$.

PROBLÈME **12 points**

Sur le graphique ci-dessous, Γ est la courbe représentative dans le repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ (figure 1).
On suppose que

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement monotone sur les intervalles $]-\infty\ ;\ 0]$ et $[0\ ;\ +\infty[$,
- $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- Γ passe par les points A$(-1\ ;\ 0)$ et B$(0\ ;\ -1)$.
- la droite d'équation $y = -1$ est tangente à la courbe Γ au point B.
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$,
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe lorsque x tend vers $+\infty$.



Première partie : travaux sur f

A. Gestion des données

1. Quelles sont les valeurs numériques de $f(0)$, de $f(-1)$ et de $f'(0)$? Justifier votre réponse.

2. Quelle est la limite de f en $+\infty$. Justifier votre réponse.

3. Donner le tableau de variations de la fonction f.

4. Donner le signe des nombres dérivés $f'(-2)$ et $f'(3)$ en justifiant votre réponse.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$
— l'équation $f(x) = 0$,
— l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

B. Détermination de l'expression de $f(x)$

On suppose que $f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont deux constantes réelles, et x la variable réelle.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout x réel en fonction de a et de b.

2. En utilisant la question A. 1. précédente, déterminer les valeurs de a et de b.

Deuxième partie : travaux sur une primitive de f sur $\mathbb{R}$

A

1. Donner le signe de f d'après la courbe Γ donnée par la figure 1.
2. Justifier pourquoi, parmi les courbes proposées sur l'annexe, les courbes $\mathscr{C}_G$ et $\mathscr{C}_H$, ne peuvent pas représenter une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   (On appelle F une primitive de f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_F$ est également tracée sur l'annexe (figure 2).

B

1. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_F$ en son point d'abscisse 0.
2. Déterminer (sans chercher l'expression de $F(x)$ en fonction de x l'aire $\mathscr{A}$ (en unités d'aire) de la portion du plan délimitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

Troisième partie : étude de la fonction F sur $\mathbb{R}$

On suppose désormais que, pour tout x réel, $F(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$. **A**

1. Calculer $F'(x)$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x)$.
3. **a.** Montrer que pour tout x réel on a $F(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{2}{\mathrm{e}^{-x}}$.

   b. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

   c. En déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera une équation.

B. On se propose dans cette question de déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite D d'équation $y = 3x+6$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x+2)\left(\mathrm{e}^x - 3\right) = 0$.
2. En déduire les coordonnées des points recherchés.

Annexe

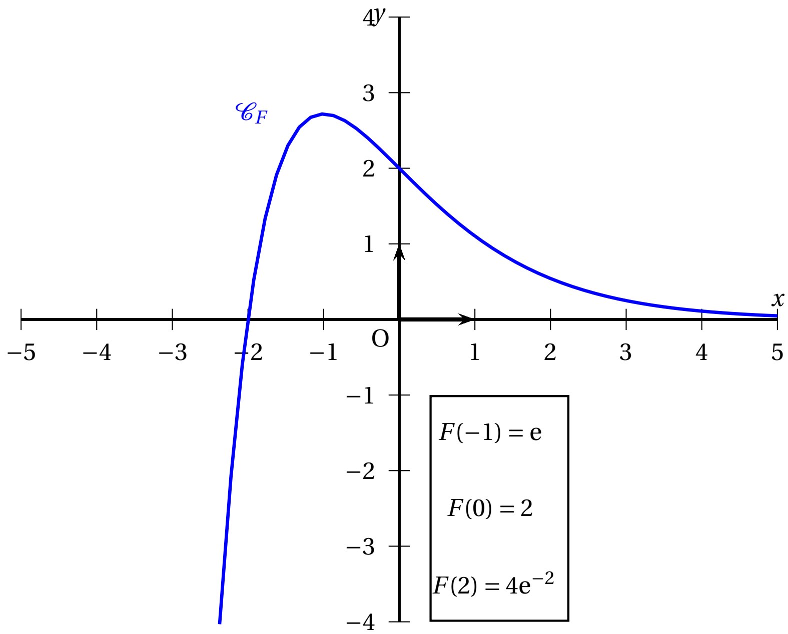


Figure 2 : fonction F

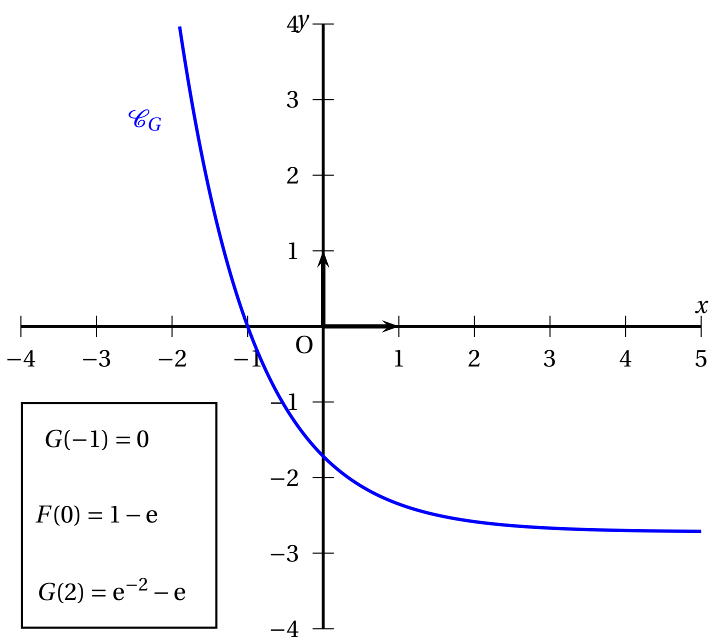


Figure 3 : fonction G

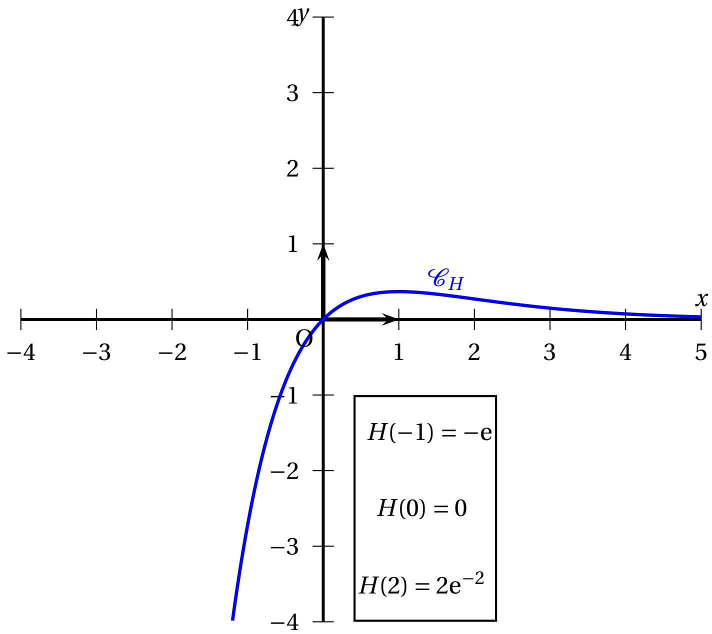


Figure 4 : fonction H