Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Métropole 13 septembre 2012 ∽
Génie électronique, électrotechnique & optique

EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse fausse ou une absence de réponse vaut 0 point.
Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte.
Recopier sur la copie cette réponse exacte.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les points A et B d'affixes respectives z_{A} et z_{B} avec :

$$z_{\mathrm{A}} = -\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{B}} = -1-\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

1. Le nombre complexe z_{A} est solution de l'équation :

   a. $\mathrm{i}z-\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}=0$ **b.** $\mathrm{i}z-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}=0$ **c.** $\mathrm{i}z+\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}=0$

2. Le nombre complexe z_{B} est solution de l'équation :

   a. $z^2-2z+4=0$ **b.** $z^2+2z+4=0$ **c.** $z^2-2z-4=0$

3. L'écriture exponentielle du nombre complexe z_{B} est :

   a. $2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$ **b.** $2\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$ **b.** $\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$

4. Le triangle OAB est :

   a. équilatéral **b.** rectangle et isocèle **c.** isocèle

5. Soit C le point d'affixe $-2\mathrm{i}$.
   Le point C est l'image du point B par la rotation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point d'affixe z' tel que :

   a. $z'=z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ **b.** $z'=z+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ **b.** $z''=z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

EXERCICE 2 **4 points**

On interroge 2 000 personnes qui possèdent un téléphone portable. On leur demande quel est leur opérateur de téléphonie et quelle est la durée mensuelle de communication de leur forfait. On consigne les résultats dans un fichier. L'analyse de ce fichier permet d'obtenir les résultats suivants :

	1/2 heure	1 heure	2 heures
Opérateur A	100	500	300
Opérateur B	40	100	160
Opérateur C	300	300	200

On choisit au hasard le nom d'une personne dans le fichier. On suppose que chaque nom a la même chance d'être choisi.

1. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
E : « le nom choisi est celui d'une personne cliente de l'opérateur C ».
F : « le nom choisi est celui d'une personne qui possède un forfait d'une demi-heure chez l'opérateur C ».
G : « le nom choisi est celui d'une personne qui possède un forfait d'une demi-heure ou qui a opté pour l'opérateur C ».
H : « le nom choisi est celui d'une personne qui possède un forfait d'une durée d'au moins une heure ».

2. Soit X la variable aléatoire qui à chaque client associe la durée, exprimée en heure, de son forfait.

a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Quelle est l'espérance mathématique de cette variable aléatoire ?

PROBLÈME **11 points**

Le but du problème est d'étudier la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 \ln x - \frac{3}{2}x^2 + 2x$$

On désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 2x\ln x - 2x + 2.$$

1. On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.
Établir que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = 2\ln x$.

2. En déduire que la fonction g possède un minimum. Préciser la valeur de ce minimum.

3. Démontrer alors que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.

Partie B : étude de la fonction *f*

1. a. On admet que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x = 0$.
Déterminer la limite de la fonction f en 0.

b. Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f(x) = x^2\left(\ln x - \frac{3}{2} + \frac{2}{x}\right)$.

c. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. a. Montrer que, pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = g(x)$.

b. En utilisant les résultats de la partie A, préciser les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$, puis dresser son tableau de variations sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C : position relative de deux courbes et calcul d'aire

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = x^2 \ln x$.
Les courbes $\mathscr{C}$ et Γ sont tracées sur le document annexe à rendre avec la copie.

1. **a.** Démontrer que $f(x) - x^2 \ln x = \dfrac{x}{2}(-3x+4)$.

   b. Étudier le signe de $f(x) - x^2 \ln x$ sur $]0~;~+\infty[$.

   c. En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.

2. Soit a un réel appartenant à $\left]\dfrac{4}{3}~;~+\infty\right[$.

   La droite d'équation $x = a$ coupe la courbe Γ en M et la courbe $\mathscr{C}$ en N.

   a. Dans cette question uniquement, on choisit $a = 3$.

   Sur le graphique en annexe, placer les points M et N, puis calculer la distance MN.

   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Pour quelles valeurs du réel a la distance MN est-elle supérieure ou égale à 10 ?

3. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre les courbes Γ, $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = \dfrac{4}{3}$ et $x = 3$.

   a. Hachurer ce domaine sur le graphique annexe.

   b. Calculer $\mathscr{A}$.

ANNEXE

À RENDRE AVEC LA COPIE