∽ Baccalauréat STI Polynésie juin 1999 ∾
Génie électronique, génie électrotechnique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ direct. L'unité graphique sera égale à 4 cm.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

   On désigne par z_1 et z_2 les solutions, z_1 étant celle dont la partie imaginaire est négative.
   Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. Soit A le point d'affixe z_1 et B celui d'affixe z_2. Placer A et B et démontrer que le triangle AOB est équilatéral.
3. Soit E le point d'affixe $z_3 = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et F son image par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   Déterminer l'affixe du point F et montrer que F est le milieu du segment [OB].
4. Soit D l'image de E par la translation de vecteur $2\vec{v}$.
   Déterminer l'affixe de D et montrer que OD = DB. En déduire que la droite (AD) est la médiatrice de [OB].

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 9y = 0.$$

2. Déterminer l'unique solution f vérifiant

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\sqrt{3}$$

   .
3. Écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a\cos(3x - b)$ où le réel a est strictement positif et le réel b appartient à l'intervalle $[0 ; \pi]$.
4. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ l'équation :

$$2\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

PROBLÈME **11 points**

Spot la fonction f définie sur $]-\infty ; +\infty[$ par

$$f(x) = 1 - x^2\text{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

Partie A Étude de la fonction

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la représentation graphique ?

2. **a.** Montrer que $f'(x) = x(x-2)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$.

c. Construire le tableau de variations de f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.
À l'aide de la calculatrice déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

4. Déterminer une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1 puis construire la droite d'équation $y = 1$, la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie B Représentation graphique

Soit $\mathscr{P}$ la courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ de la fonction g définie sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 1 - 2x^2.$$

1. Construire $\mathscr{P}$ dans le repère précédent.

2. Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ se coupent en deux points A et B dont on déterminera les coordonnées.

3. Déterminer suivant les valeurs de x la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

Partie C Calcul d'aire

Soit H la fonction définie définie sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$ par :

$$H(x) = \frac{2}{3}x^3 + \mathrm{e}^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right).$$

1. Vérifier que H est une primitive de $f - g$.

2. En déduire l'aire en cm^2 de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ et les droites d'équations $x = -\ln 2$ et $x = 0$.
En donner la valeur arrondie au dixième.