Baccalauréat STI Polynésie juin 2003
Génie électronique, électrotechnique, optique

Durée de l'épreuve : 4 heures Coefficient : 4

La candidat traitera obligatoirement les deux exercices et le problème

EXERCICE 1 — 5 points

La feuille fournie en annexe sera rendue avec la copie
Dans cet exercice, les probabilités seront données sous forme de fractions simplifiées.

Deux urnes contiennent chacune trois jetons indiscernables au toucher : la première contient trois jetons verts numérotés de 0 à 2 et la seconde trois jetons blancs numérotés de 0 à 2.
On tire au hasard un jeton dans la première urne et on note a son numéro, puis un jeton dans la seconde urne et on note b son numéro.
Le résultat d'un tirage est donc un couple $(a\,;\,b)$ et les tirages sont équiprobables.

1. **a.** En complétant l'arbre donné en annexe, déterminer le nombre d'éventualités.
   b. Quelle est la probabilité P d'obtenir une somme $a+b$ multiple de 3 ?
2. à tout couple $(a\,;\,b)$ précédemment défini, on associe le nombre complexe z écrit sous forme algébrique $z = a + \text{i}b$ où i est le nombre complexe tel que $\text{i}^2 = -1$.
   On note $|z|$ le module de z.
   a. Quelle est la probabilité P_1 pour que z soit réel ?
   b. Quelle est la probabilité P_2 pour que $|z| = 1$?
3. Soit X la variable aléatoire qui, à tout nombre complexe z défini ci-dessus, associe son module.
   a. Compléter le tableau des valeurs de X donné en annexe.
   b. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c. Déterminer la probabilité P_3 de l'évènement « $|z| \leqslant 2$ ».
   d. Déterminer l'arrondi au centième de l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 2 — 5 points

On considère l'équation différentielle

$$(\text{E}) : \quad 16y'' + 25y = 0$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & \sqrt{3} \\ f'(0) & = & \dfrac{5}{4} \end{array}\right.$$

3. Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{5}{4}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.
4. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[\dfrac{2\pi}{15}\,;\,\dfrac{4\pi}{15}\right]$.

PROBLÈME **10 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-\infty ; 1[$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c + 2\ln(1-x) \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse -1.

Partie A : Détermination de f

Déterminer $a,\ b,\ c$ de façon que les conditions suivantes soient remplies :

- $\mathscr{C}$ passe par le point O et admet en ce point une tangente $\mathscr{C}$ de coefficient directeur 1 ;
- la tangente à $\mathscr{C}$ en A est parallèle à l'axe des abscisses.

Dans toute la suite du problème on prend $f(x) = x^2 + 3x + 2\ln(1-x)$.

Partie B : étude de la fonction f et tracé de $\mathscr{C}$

1. Déterminer la limite de f en 1. En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$.
2. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction g définie sur $]-\infty ; 1[$ par $g(x) = x^2+3x$. En déduire la limite de f en $-\infty$.
3. On désigne par f' la dérivée de f. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{(1-2x)(x+1)}{1-x}$ pour tout nombre réel x strictement inférieur à 1.
4. étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x. Dresser le tableau de variations de f.
5. **a.** En utilisant le tableau de variations, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

   b. On note α la solution appartenant à $]-\infty ; -1[$. Justifier que α appartient à $]-2 ; -1,8[$.
6. Construire $\mathscr{D}$, $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie C : calcul d'aire

1. **a.** Soient H et h les fonctions définies sur $]-\infty ; 1[$ par :

   $$H(x) = (x-1)\ln(1-x) - x \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(1-x).$$

   Démontrer que H est une primitive de h sur $]-\infty ; 1[$.

   b. En déduire une primitive F de f sur $]-\infty ; 1[$.
2. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$.

   On donnera la valeur exacte de $\mathscr{A}$ en cm^2 en fonction de α.

ANNEXE

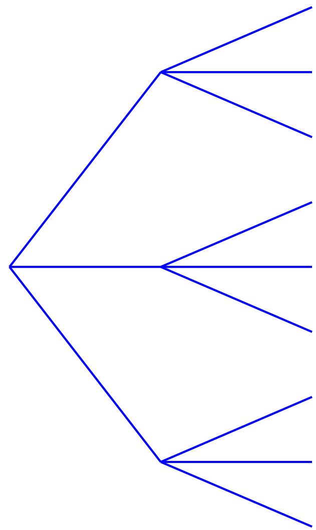

Tableau des valeurs de X

b \ a	0	1	2
0			
1			
2			