Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie juin 2010
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 centimètres. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre l'équation $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes.
2. On considère les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} + \text{i} \quad ; \quad z_2 = \sqrt{3} - \text{i} \quad \text{et } z_3 = 2\text{i}$$

   a. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_1, z_2 et z_3.

   b. Placer les points A B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   c. Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{z_3}{z_2}$.

   d. En déduire que le point C est l'image du point B par une rotation R de centre O dont on précisera l'angle.

3. Soit E le symétrique du point A par rapport à l'origine O du repère.

   a. Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point E.

   b. Montrer que le point E est l'image du point C par la rotation R.

4. Démontrer que le triangle BEC est équilatéral.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre l'équation différentielle (E) :

$$9y'' + y = 0$$

   où y désigne une fonction de la variable x et y'' la dérivée seconde de la fonction y.

2. On désigne par f la solution de (E) vérifiant $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(0) = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

   a. Déterminer la fonction f.

   b. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

3. La valeur efficace de la fonction f est le réel positif E défini par $E^2 = \dfrac{1}{6\pi}\displaystyle\int_0^{6\pi} [f(x)]^2\,\text{d}x$.

   a. Montrer que, pour tout réel x, $[f(x)]^2 = \dfrac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\dfrac{2x}{3} + \dfrac{5\pi}{3}\right)\right]$.

   b. Calculer le réel E.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On donne en annexe la courbe représentative Γ d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ et sa tangente Δ au point d'abscisse 0.

1. Par lecture graphique, donner les valeurs entières de $g(0)$ et de $g'(0)$.

2. On admet qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x,
$g(x) = \text{e}^x + ax + b$.
On note g' la dérivée de la fonction g.

a. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x.

b. À l'aide des résultats des deux questions précédentes calculer les valeurs de a et de b.

3. Dans la suite du problème on admet que, pour tout réel x, $g(x) = \text{e}^x - 2x + 2$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction g puis dresser son tableau de variations dans lequel on précisera la valeur exacte de l'extremum (les limites ne sont pas demandées).

b. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

c. Comment ce résultat se traduit-il graphiquement ?

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\left(1 + 2\text{e}^{-x}\right)$$

On note f' la dérivée de la fonction f et on appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 centimètres en abscisse et 1 centimètre en ordonnée.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote en $+\infty$ la droite D d'équation $y = x$.

c. Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite D. On précisera leur point d'intersection.

3. a. Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout réel, $f'(x) = \text{e}^{-x}g(x)$.

b. En utilisant les résultats de la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

5. Sur une feuille de papier millimétré qui vous sera fournie, tracer les droites D et T ainsi que la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B

On note $\mathscr{A}$ la mesure, exprimée en centimètres carrés, de l'aire du domaine du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$ la droite D l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

1. Hachurer le domaine ainsi défini.

2. Soient h et H les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x\text{e}^{-x}$ et
$H(x) = 2(-x-1)\text{e}^{-x}$.
Montrer que la fonction H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis en donner une valeur arrondie au millimètre carré près.

Annexe (problème - partie A)