∽ Baccalauréat STI Métropole ∾
Génie électronique juin 2003

EXERCICE 1 **4 points**

1. **a.** Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, résoudre l'équation d'inconnue z

$$z^2 - 8z + 32 = 0.$$

   b. Écrire les solutions de cette équation sous forme exponentielle.

2. Soit le nombre complexe $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Donner sa forme algébrique.

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm, on donne les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 4 + 4\mathrm{i} \qquad z_{\mathrm{B}} = 4 - 4\mathrm{i} \qquad z_{\mathrm{C}} = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

   a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

   b. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère un circuit électrique fermé comprenant un condensateur dont la capacité, exprimée en farads, a pour valeur C, une bobine dont l'inductance, exprimée en henrys, a pour valeur L et un interrupteur.
Le temps t est exprimé en secondes. à l'instant $t = 0$, on suppose le condensateur chargé, on ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit.
On appelle $q(t)$ la valeur de la charge, exprimée en coulombs, du condensateur à l'instant t.
On définit ainsi une fonction q , deux fois dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, dont la dérivée première est notée q'.
On admet que la fonction q est solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \qquad y'' + \frac{1}{\mathrm{LC}}y = 0$$

où y est définie et deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et de dérivée seconde y''.
Dans tout l'exercice on prend $\mathrm{C} = 1,25 \times 10^{-3}$ et $\mathrm{L} = 0,5 \times 10^{-2}$.

1. **a.** Montrer que q est alors solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \qquad y'' + 1,6 \times 10^5 y = 0.$$

   b. Résoudre l'équation différentielle (E).

   c. Déterminer la solution particulière q de (E) vérifiant :

$$q(0) = 6 \times 10^{-3} \quad \text{et} \quad q'(0) = 0.$$

2. On sait que la valeur $i(t)$ de l'intensité, exprimée en ampères, du courant qui parcourt le circuit à l'instant t vérifie $i(t) = -q'(t)$. On définit ainsi une fonction i sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

   a. Vérifier que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$

$$i(t) = 2,4\sin(400t).$$

   b. Calculer : $\dfrac{400}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{400}} \cos(800t)\,\mathrm{d}t$.

c. On désigne par I_e la valeur, exprimée en ampères, de l'intensité efficace dans le circuit. Son carré est donné par la formule :

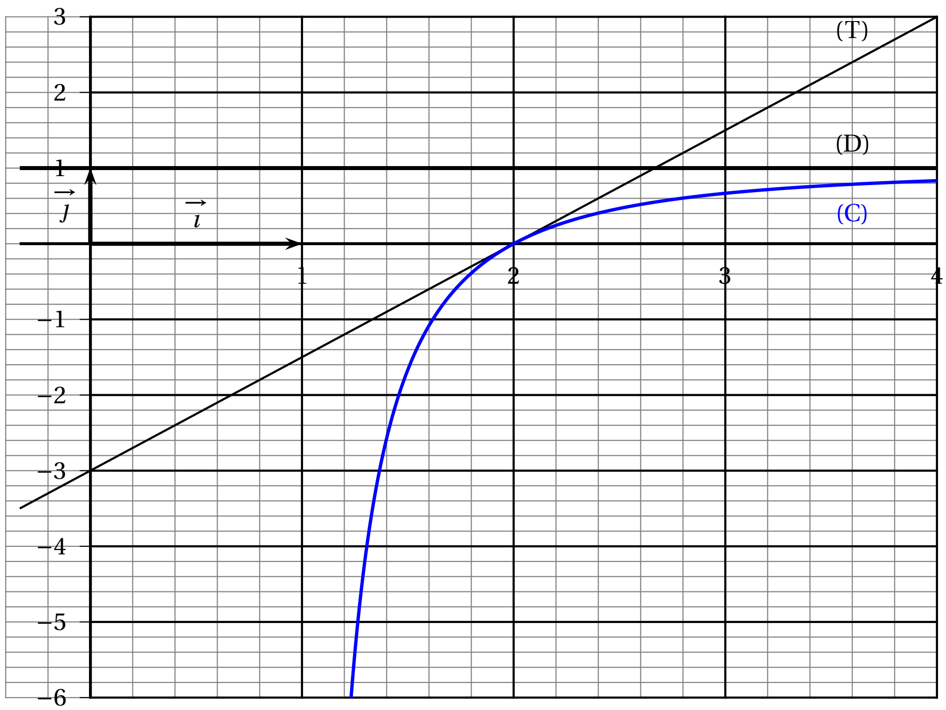
$$\mathrm{I}_e^2 = \frac{400}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{400}} i^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Calculer I_e^2 (on pourra utiliser la formule $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1-\cos 2a)$), puis donner une valeur approchée de I_e à 10^{-3} près, sachant que I_e est un nombre positif.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On donne, dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, la représentation graphique ($\mathscr{C}$) d'une fonction g définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ ainsi que deux droites (T) et (D). La droite (T) passe par les points de coordonnées respectives $(2\,;\,0)$ et $(0\,;\,-3)$. La droite (D) a pour équation $y = 1$.



1. **a.** Déterminer graphiquement $g(2)$.

   b. Sachant que la droite (T) est tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 2, déterminer graphiquement $g'(2)$.

   c. On admet que la droite (D) est asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$). Déterminer graphiquement la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

   d. Sachant que la courbe ($\mathscr{C}$) coupe l'axe des abscisses en un seul point, étudier graphiquement le signe de la fonction g sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

2. On définit les fonctions g_1, g_2 et g_3 sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par :

$$g_1(x) = 1 - \frac{1}{x-1} \quad ; \quad g_2(x) = 1 - \frac{2}{x^2 - x} \quad ; \quad g_3(x) = \ln(x-1).$$

L'une d'elles est la fonction g que l'on se propose d'identifier en utilisant les résultats de la première question.

a. Calculer $g_1(2)$, $g_2(2)$ et $g_3(2)$.
Ces résultats permettent-ils d'éliminer une des trois fonctions ?

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g_1(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_3(x)$.
Quelle fonction peut-on alors éliminer ?

c. On note g_1' et g_2' les fonctions dérivées respectives de g_1 et g_2.
Calculer $g_1'(2)$ et $g_2'(2)$ puis conclure.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x + 1 + 2\ln x - 2\ln(x-1).$$

On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Quelle propriété de la fonction logarithme népérien permet de prouver que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]1~;~+\infty[$,

$$f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)~?$$

   b. Déterminer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$?

2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Justifier que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

   c. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]1~;~+\infty[$, $\dfrac{x}{x-1} > 1$.
   Quel est alors le signe de $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ pour x appartenant à $]1~;~+\infty[$?

   d. En déduire la position de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à la droite (D).

3. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]1~;~+\infty[$, $f'(x) = g(x)$ où g est la fonction trouvée dans la **partie A**.

   b. À l'aide des résultats graphiques obtenus dans la **partie A**, dresser le tableau de variations de la fonction f.

Partie C

1. Montrer que, sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$, la fonction H définie par

$$H(x) = x\ln x - (x-1)\ln(x-1)$$

   est une primitive de la fonction h définie par $h(x) = \ln x - \ln(x-1)$ sur cet intervalle.

2. **a.** Sur la feuille annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe $(\mathscr{C}_f)$. Sur cette figure, représenter la droite (D) et hachurer la partie du plan comprise entre la droite (D), la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

   b. On désigne par $\mathscr{A}$ la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan hachurée précédemment. Donner la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près par excès.

Annexe : représentation de la courbe ($\mathscr{C}_f$)
à rendre avec la copie