Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie électronique Métropole juin 2004

EXERCICE 1 **5 points**

Le nombre i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans, l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 4z\sqrt{2} + 16 = 0.$$

2. a. On considère les nombres complexes

$$z_A = 4\text{i} \qquad ; \qquad z_B = 2\sqrt{2}(1-\text{i}) \qquad ; \qquad z_C = 2\sqrt{2}(1+\text{i}).$$

Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres.

b. Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

Placer dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

3. À tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe z' par la formule

$$z' = \text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}} \times z.$$

On définit la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

a. Quelle est cette transformation ? Donner ses éléments caractéristiques.

b. Montrer que $z'_B = z_A$. Que peut-on en déduire pour les points A et B ?

c. Calculer z'_A sous forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ (avec $r > 0$), puis placer, dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ le point D d'affixe $z_D = z'_A$.

d. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 **4 points**

Un organisme de voyages prépare en Logoland un circuit de découverte qui doit passer une et une seule fois dans chacune des quatre villes notées respectivement I, L, O et Z.

Pour établir l'ordre des visites des villes, l'organisme doit tenir compte de deux impératifs

- Le circuit ne peut partir que de I, L ou Z car la ville O ne possède pas d'aéroport international.
- La fin du voyage devant être en bord de mer, le circuit doit se terminer par I ou Z.

Un circuit possible est I, L, O et Z. Il sera noté (I, L, O, Z) .

Un exemple de circuit impossible est I, O, Z, L. Il est noté (I, O, Z, L).

1. Expliquer pourquoi ce dernier circuit est impossible.
2. Déterminer les huit circuits possibles.
3. On choisit un circuit au hasard (chaque circuit a la même probabilité d'être choisi).

a. Quelle est la probabilité pour que le circuit se termine à I ?

b. Quelle est la probabilité pour que le circuit commence à L ?

4. L'agence de voyages s'intéresse au nombre de kilomètres parcourus en bus entre la ville de départ et la ville d'arrivée pour chaque circuit. Les distances exprimées en kilomètres entre les quatre villes sont indiquées dans le tableau suivant :

	L	I	Z	0
L	0	500	600	300
I	500	0	500	700
Z	600	500	0	600
O	300	700	600	0

Par exemple, on peut lire que la distance entre O et I est de 700 km.

On note X la variable aléatoire qui à chaque circuit associe le nombre de kilomètres parcourus.

a. En s'aidant du tableau fourni, déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

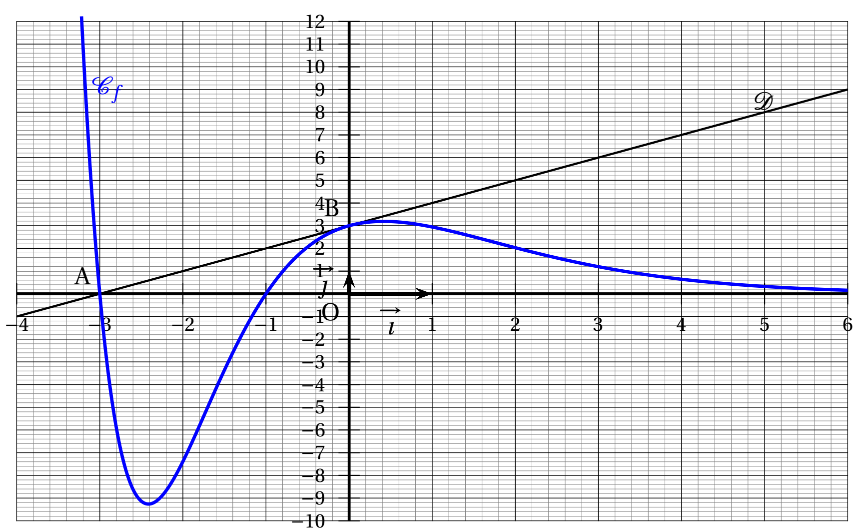
PROBLÈME — 11 points

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^{-x}$$

où $a,\ b$ et c désignent trois nombres réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie.
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.



On admet que la droite $\mathscr{D}$ passe par A et est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.

1. **a.** À l'aide d'une lecture graphique, déterminer les coordonnées entiéres des points A et B. En déduire $f(-3)$ et $f(0)$.

   b. Montrer qu'une équation de la droite (AB) est : $y = x + 3$. En déduire la valeur de $f'(0)$.

2. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,
   $f'(x) = \left[-ax^2 + (2a-b)x + b - c\right] \mathrm{e}^{-x}$.

   b. En déduire $f'(0)$, en fonction de b et c.

3. **a.** En utilisant les questions précédentes, montrer que les réels a, b et c sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 9a-3b+c & = & 0\\ b-c & = & 1\\ c & = & 3 \end{array}\right.$$

   b. Résoudre le système et en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie B

On suppose que f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 + 4x + 3\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

1. **a.** Vérifier que pour x différent de zéro, $f(x) = \left(1 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right) x^2 \mathrm{e}^{-x}$.

   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. En déduire une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

   c. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2. **a.** Vérifier que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ $f'(x) = (-x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Pour tout x réel, étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

   c. Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'ordonnée de chacun des points de la courbe $\mathscr{C}_f$, où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique α pour x appartenant à $[-1\ ;\ 0]$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie C

1. Soit F La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = (-x^2 - 6x - 9)\mathrm{e}^{-x}.$$

   Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x + 3 - f(x)$.

3. On considère la partie du plan comprise entre la droite $\mathscr{D}$, la courbe $\mathscr{C}_f$, et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 0$.
   On désigne par $\mathscr{A}$ la valeur, exprimée en cm^2, de l'aire de cette partie.
   Calculer $\mathscr{A}$.