Baccalauréat STI Antilles–Guyane juin 2008
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un vrai/faux : il s'agit donc de préciser si chacune des affirmations proposées est vraie ou fausse.

À chaque bonne réponse est attribuée 0,5 point. Toute réponse incorrecte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'enlève aucun point. En cas de total négatif, la note attribuée à l'exercice sera 0.

Pour chaque affirmation, le candidat donnera la réponse sur sa copie en écrivant en toutes lettres « vrai » ou « faux ». On ne demande aucune justification.
Les questions 1., 2., 3. sont indépendantes.

1. On considère le polynôme P défini pour tout réel x par
$P(x) = (x-1)(x-3)(2x+3)$.

a. L'équation $P(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ trois solutions qui sont 1, 3 et $-\dfrac{3}{2}$.
b. Pour tout réel x, $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x$.
c. L'équation $(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - 3)(2\mathrm{e}^x + 3) = 0$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$.

2. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les nombres $z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$.

a. Les nombres z_1 et z_2 sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0$.
b. Un argument de z_2 est $-\dfrac{3\pi}{4}$.
c. Le module de z_1 est $\sqrt{2}$.

3. Soit l'équation différentielle (E) : $4y'' + 49y = 0$ dans laquelle l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et y'' sa dérivée seconde.

a. La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = A\cos\dfrac{7x}{2} + B\sin\dfrac{7x}{2}$, où A et B sont deux constantes réelles, est solution de (E).
b. La fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = 3\cos\left(\dfrac{7x}{2} - \dfrac{3\pi}{4}\right)$ est solution de (E).
c. La fonction k définie pour tout réel x par $k(x) = -\sqrt{2}\cos\dfrac{7x}{2} - \sqrt{2}\sin\dfrac{7x}{2}$ est la solution de (E) qui vérifie $k(0) = \sqrt{2}$ et $k'(0) = 0$.

EXERCICE 2 **5 points**

Une boîte contient 140 tiges métalliques de forme cylindrique, de dimensions variées, issues de la production d'un atelier.

Le tableau suivant donne leur répartition suivant leur longueur ℓ et leur diamètre d, exprimée en millimètres.

ℓ \ d	15,8	16	16,1	16,3
84	5	9	6	0
85	15	19	21	4
86	12	6	12	7
87	6	7	6	5

Par exemple il y a 12 tiges métalliques de longueur 86 mm et de diamètre 16,1 mm.
On tire au hasard une tige de la boîte, les tirages étant équiprobables.
Dans tout l'exercice, les probabilités seront données sous forme de fraction.

1. Calculer les probabilités respectives p_1, p_2 et p_3 des évènements suivants :

a. « obtenir une tige de longueur 86 mm et de diamètre 16 mm » ;

b. « obtenir une tige de longueur 85 mm » ;

c. « obtenir une tige de longueur inférieure ou égale à 86 mm ».

2. Selon les normes imposées par la production, une tige métallique est conforme lorsque sa longueur ℓ et son diamètre d exprimés en millimètres, vérifient :

$$84,5 \leqslant \ell \leqslant 85,5 \quad \text{et} \quad 15,9 \leqslant d \leqslant 16,2$$

Calculer la probabilité de l'évènement : « obtenir une tige conforme ».

3. Soit X la variable aléatoire qui à chacun des tirages possibles, associe la longueur en millimètres de la tige obtenue.

a. Quelle est la probabilité de l'évènement « $X = 84$ ».

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer la probabilité de l' évènement « $X \geqslant 85$ ».

d. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. En donner un arrondi au centième.

PROBLÈME **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative dans le repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\text{e}^x, \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ désignent trois nombres réels tels que :}$$

- le point A de coordonnées $(0 ; -1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$;
- la courbe $\mathscr{C}$ admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;
- $f(1) = 2\text{e}$.

Partie A

1. Démontrer que $c = -1$.

2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. En remplaçant c par sa valeur, donner pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$ en fonction de a et de b.

b. Calculer a et b.

Partie B

On admet que pour tout réel x, $f(x) = \left(2x^2 + x - 1\right)\mathrm{e}^x$.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on rappelle que, pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$).

   Interpréter graphiquement ce résultat

2. **a.** Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = x(2x+5)\mathrm{e}^x$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du réel x.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.