∽ Baccalauréat STI Antilles–Guyane septembre 2009 ∾
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **4 points**

Dans cet exercice, les quatre questions sont **indépendantes**.
Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

1. On considère le nombre complexe $z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Écrire z sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.
2. Soit A le point du plan d'affixe $_{\text{A}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ et A′ l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe de A′ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
3. On considère les points B, C et D du plan d'affixes respectives :

   $$z_{\text{B}} = 1 + 2\mathrm{i},\; z_{\text{C}} = 4 - \mathrm{i},\; z_{\text{D}} = -1 - 3\mathrm{i}.$$

   Calculer les distances DB et DC. Donner une interprétation géométrique du résultat.
4. Déterminer le réel c pour que le nombre complexe $-4 + 2\mathrm{i}$ soit solution de l'équation :

   $$z^2 + 8z + c = 0.$$

   Résoudre ensuite cette équation dans l'ensemble $\mathbb{C}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Une personne possède un téléphone portable dont le code comporte quatre chiffres. Elle ne se souvient plus de ce code et dispose seulement des informations suivantes :

— les quatre chiffres sont pris parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6 et sont tous différents ;
— le deuxième chiffre est un 2 et le quatrième est un 5.

La situation peut être schématisée de la façon suivante :

?	2	?	5

En tenant compte de toutes ces informations, cette personne saisit un code en choisissant au hasard les deux chiffres manquants.

1. Écrire la liste des douze codes de quatre chiffres qui sont alors possibles.
2. Sachant que ces douze codes sont équiprobables et que le bon code est :

3	2	6	5

   déterminer les probabilités respectives p_1, p_2 et p_3 des évènements suivants :

   a. « Le code saisi est correct ».

   b. « Le code saisi ne comporte aucun chiffre exact bien placé à part les deux déjà connus ».

   c. « Le code saisi comporte au moins un chiffre exact bien placé en plus des deux chiffres déjà connus ».

3. On définit la variable aléatoire X qui, à chaque code saisi, associie le nombre total de chiffres exacts bien placés (y compris ceux déjà connus au départ).

   a. Déterminer la probabilité de l'évènement « $X = 3$ ».

   b. Donner les trois valeurs prises par la variable aléatoire X.

   c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

PROBLÈME **12 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A : Étude d'une fonction *f*

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par :

$$f(x) = 1 + \ln(2x+1)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée en annexe pour aider le candidat et lui permettre de vérifier ses réponses.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\dfrac{1}{2}$ et en donner une interprétation graphique.

   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

   a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

   b. Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.

   c. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a $f(x) \geqslant 1$.

3. **a.** Résoudre dans l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ l'équation : $1 + \ln(2x+1) = 0$.

   b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec chacun des axes du repère.

Partie B : Étude d'une fonction *g*

Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = (x+1)\text{e}^{-x}.$$

On note Γ la courbe représentative de g dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de g en $-\infty$.

   b. Déterminer la limite de g en $+\infty$. Donner une interprétation graphique de cette limite.

2. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

   a. Démontrer que, pour tout réel x, $g'(x) = -x\text{e}^{-x}$.

   b. Étudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs du réel x et dresser le tableau de variation de la fonction g.

3. Vérifier que, pour tout réel x, on a $g(x) \leqslant 1$.

4. Tracer la courbe Γ dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}$ sur la feuille donnée en annexe.

Partie C : Calcul d'aire

1. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln(2x+1).$$

a. Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.

b. Calculer l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. On considère la fonction G définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :
$G(x) = (-x-2)\mathrm{e}^{-x}$.
On admet que la fonction G est une primitive de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Calculer l'intégrale $I_2 = \displaystyle\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$.

3. a. Démontrer, en utilisant des résultats établis dans les parties A et B, que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la courbe Γ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Hachurer sur le graphique la partie $\mathscr{P}$ du plan délimitée par la courbe Γ, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

c. Déduire de ce qui précède la valeur exacte de l'aire de la partie $\mathscr{P}$ exprimée en unités d'aire.

Annexe : À rendre avec la copie