Baccalauréat STI Nouvelle–Calédonie novembre 2010
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 3 centimètres. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation

$$z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0.$$

2. Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives :

$$z_A = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \quad \text{et} \quad z_B = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

a. Déterminer le module et un argument de z_A et de z_B.

b. Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle.

c. Placer les points A et B dans le repère $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

a. Construire le point C, image du point B par la rotation r.

b. Calculer l'affixe z_C du point C. On donnera d'abord la forme exponentielle de z_C puis sa forme algébrique.

4. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AO}$ a pour affixe $-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$.

b. En déduire l'affixe z_D du point D, image du point B par la translation t.

c. Construire le point D.

5. Montrer que le triangle OBD est équilatéral.

6. Montrer que le triangle BCD est rectangle.

EXERCICE 2 **4 points**

Une entreprise fabrique des pièces en grande série. Une pièce est considérée conforme si elle répond aux critères de diamètre et d'épaisseur exigés. Afin de vérifier la conformité de ces pièces, on procède à deux tests : un test sur le diamètre et un test sur l'épaisseur.
On effectue les deux tests sur 500 pièces et on observe que :

— 18 pièces ont un défaut de diamètre ;
— 15 pièces ont un défaut d'épaisseur ;
— 5 pièces ont les deux défauts.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Pièces ayant un défaut de diamètre	Pièces n'ayant pas un défaut de diamètre	Total
Pièce ayant un défaut d'épaisseur			
Pièce n'ayant pas un défaut d'épaisseur			
Total	18		500

2. On prélève au hasard une pièce parmi les 500 pièces testées. Elles ont toutes la même probabilité d'être choisies. Quelle est la probabilité que la pièce prélevée présente les deux défauts ?

3. On prélève au hasard une pièce parmi celles qui présentent un défaut de diamètre. Elles ont toutes la même probabilité d'être choisies. Quelle est la probabilité, à 10^{-2} près, que la pièce prélevée présente également un défaut d'épaisseur ?

4. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée, associe le nombre de défauts de conformité de la pièce.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance de X.

PROBLÈME **11 points**

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Détermination d'une fonction *f*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{x} + c$$

où $a,\ b$ et c désignent trois réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie. On note f' la dérivée de la fonction f.

Sur le graphique de l'annexe, à rendre avec la copie, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 1 centimètre en abscisse et 0,25 centimètre en ordonnée.

La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 3.

La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A(0 ; 7) et la droite T est tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$. Le point B(−2 ; 1) appartient à la droite T.

1. À l'aide des données précédentes et du graphique, donner sans justification les valeurs de $f(0),\ f'(0)$ et $f'(3)$.

2. Exprimer $f(0)$ en fonction de b et de c.

3. **a.** Montrer que, pour tout réel $x,\ f'(x) = (ax+a+b)\mathrm{e}^{x}$.

b. En déduire les expressions de $f'(0)$ et de $f'(3)$ en fonction de a et de b.

4. **a.** En utilisant les résultats des questions 1., 2. et 3.b, montrer que $a,\ b$ et c vérifient le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} b+c & = & 7\\ a+b & = & 3\\ 4a+b & = & 0 \end{array}\right.$$

b. Déterminer les valeurs de $a,\ b$ et c puis donner l'expression de $f(x)$.

Partie B : Étude de la fonction *f*

Dans la suite du problème, on admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-x+4)\mathrm{e}^{x} + 3$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. En remarquant que, pour tout réel x, $f(x) = -x\mathrm{e}^x + 4\mathrm{e}^x + 3$, calculer la limite de la fonction f en $-\infty$ (on rappelle que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$).

   Interpréter graphiquement la limite trouvée.

3. **a.** Déterminer la dérivée de la fonction f et étudier son signe.

   b. Donner le tableau de variations de la fonction f.

Partie C : Calcul d'aire

1. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = (-x+5)\mathrm{e}^x + 3x.$$

   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** Soit D le domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite T d'équation $y = 3x + 7$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 3$.

   Hachurer le domaine D sur le graphique de l'annexe.

   b. Calculer, en centimètres carrés, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine D.

   On donnera la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis une valeur arrondie à 10^{-2} près.

Annexe (problème) à rendre avec la copie