Durée : 4 heures

Baccalauréat STI novembre 2006 Nouvelle-Calédonie
Génie électronique, électrotechnique, optique

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

EXERCICE 1 **6 points**

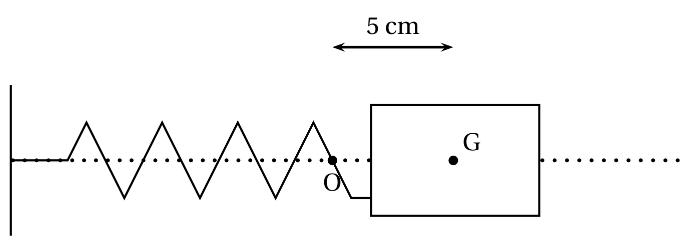
Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$(unité graphique : 1 cm).

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 4z\sqrt{3} + 16 = 0.$$

2. Soient A et B les points d'affixes respectives : $z_A = 2\sqrt{3} - 2i$ et $z_B = 2\sqrt{3} + 2i$.
   a. Calculer le module et un argument de z_A et de z_B.
   b. Construire avec précision les points A et B dans le plan en laissant les traits de construction apparents.
   c. Donner le module et un argument de $\dfrac{z_B}{z_A}$.
   d. Donner une mesure en radians de l'angle de la rotation de centre O, qui transforme A en B.
3. **a.** Soit C le symétrique de A par rapport à O. Déterminer l'affixe z_C du point C et placer le point C dans le plan.
   b. $t_{\vec{w}}$ désigne la translation de vecteur $\vec{w} = -4\sqrt{3}\,\vec{u}$. Soit D l'image de A par la translation $t_{\vec{w}}$. Déterminer son affixe z_D et placer D.
4. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **4 points**



On s'intéresse au mouvement d'un mobile qui se déplace sur un axe horizontal en étant fixé à un ressort.
L'axe est muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{\imath}\right)$ l'unité étant le cm.
G désigne le centre d'inertie. À l'équilibre G et O sont confondus. On tire de 5 cm vers la droite le mobile et on lâche.
On appelle $f(t)$ la position du mobile sur l'axe à l'instant t exprimé en secondes. Ainsi $f(0) = 5$.
On rappelle que la vitesse du mobile à l'instant t est $f'(t)$ (donc $f'(0) = 0$).
Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. On suppose, dans cette question uniquement, qu'il n'y a pas de frottements sur l'axe. On admettra dans ce cas, que la fonction f vérifie l'équation différentielle suivante : (E) :

$$y'' + 2y = 0.$$

a. Résoudre l'équation différentielle (E).

b. Déterminer la solution de (E) vérifiant $f(0) = 5$ et $f'(0) = 0$.

2. Dans cette question, on suppose qu'il y a des frottements sur l'axe.
On admet dans ce cas que pour $t \geqslant 0$, on a : $f(t) = 5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$.

a. Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a : $-5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t} \leqslant f(t) \leqslant 5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}$.

b. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
Quel est le comportement du mobile pour t assez grand ?

PROBLÈME **10 points**

Le but du problème est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{1 + 2\ln(x)}{x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ orthonormal (unité graphique : 2 cm)

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - 2\ln(x)$.

1. **a.** Déterminer la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction g (aucune limite n'est demandée).

2. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : étude de la fonction *f*

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$?

b. Vérifier que pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = x + \frac{1}{x} + 2\frac{\ln(x)}{x}$ et en déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. **a.** Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

b. Pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, étudier le signe de $\frac{1 + 2\ln(x)}{x}$ et en déduire la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (Δ).

3. **a.** Démontrer que pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

b. En utilisant les résultats de la partie A, dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Soit A le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse 1.
Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ en A.

5. Tracer la droite (Δ), la tangente (T) et la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie C : calculs d'aire

1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(x) + [\ln(x)]^2.$$

Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. Soit $(\mathscr{D})$ la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

a. Hachurer $(\mathscr{D})$ sur la figure.

b. Calculer la valeur exacte de l'aire de $(\mathscr{D})$ exprimée en cm^2.