Durée : 4 heures

Baccalauréat STI La Réunion juin 2002
Génie électronique, électrotechnique, optique

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Une feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **4 points**

Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad 2y' + y = 0,$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle x et y' sa dérivée.

1. Résoudre l'équation (E).

2. **a.** Déterminer la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ dans le plan rapporté à un repère $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$passe par le point A $(\ln 9\ ;\ 1)$.

b. Déterminer la dérivée de f et en déduire le coefficient directeur de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point A.

3. Montrer que la fonction g définie dans $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ est une autre solution de l'équation (E).

EXERCICE 2 **4 points**

La figure sera construite sur la copie et complétée au fil de l'exercice
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 3 cm.

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 + 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

b. Déterminer le module et un argument de chacune des solutions.

2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}$ et $z_B = 2\mathrm{e}^{\frac{-5\mathrm{i}\pi}{6}}$.

a. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme algébrique.

b. Dans le repère $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, construire les points A et B à la règle et au compas.
(On laissera apparentes les lignes de construction).

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a. On désigne par A$'$ l'image de A par la rotation r. Placer le point A$'$.
Exprimer l'affixe $z_{A'}$ du point A$'$ en fonction de celle du point A puis en déduire la forme exponentielle et la forme algébrique de $z_{A'}$.

b. Soit le point C d'affixe $z_C = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
Placer le point C dans le repère $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Montrer que C est l'image de B par la rotation r et écrire z_C sous la forme algébrique.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 2\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}.$$

1. Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers -1.
2. Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Soit g' la dérivée de g sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
   a. Calculer $g'(x)$.
   b. En déduire que $g'(x)$ est strictement positif pour tout x de $]-1\,;\,+\infty[$.
   c. En déduire le sens de variations de g sur $]-1\,;\,+\infty[$.
4. **a.** Calculer $g(0)$.
   b. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (2x+1)\ln(x+1) - x - 1$$

et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers -1.
   b. En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote (D) dont on donnera une équation.
2. **a.** Vérifier que pour tout x de $]-1\,;\,+\infty[$ on a : $f(x) = x\left[\left(2+\dfrac{1}{x}\right)\ln(x+1) - 1 - \dfrac{1}{x}\right]$.
   b. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. **a.** Montrer que pour tout x de l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ on a $f'(x) = g(x)$.
   b. En déduire le tableau de variations de f.
4. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions a et b sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
   Donner pour chacune l'approximation décimale à 10^{-2} près par défaut.
5. Construire l'asymptote (D) et la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (*utiliser la feuille de papier millimétré fournie*).

Partie C

Soit la fonction U définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$U(x) = \left(x^2+x\right)[\ln(x+1) - 1].$$

1. Montrer que U est une primitive de f sur $]-1\,;\,+\infty[$.
2. En déduire la valeur exacte en cm^2 de l'aire $\mathscr{A}$ de la portion du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$. On donnera le résultat final sous la forme $n\ln 2 + p$ où n et p sont des nombres entiers relatifs.