Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie électronique Métropole juin 2005

EXERCICE 1 **5 points**

1. Le nombre i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
   On considère $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$ où z est un nombre complexe.
   a. Calculer $P(2)$.
   b. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que $P(z) = (z-2)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 5 cm.
   a. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 2$, $z_{\text{B}} = 1 + \text{i}$, $z_{\text{C}} = 1 - \text{i}$.
   b. Déterminer le module et un argument de z_{A}, z_{B} et z_{C}.
   c. Montrer que C est l'image de B par une rotation de centre O dont on précisera l'angle.
   d. Déterminer les affixes des points I et J, milieux respectifs des segments [OA] et [BC].
   e. Quelle est la nature du quadrilatère OBAC ? Justifier la réponse.

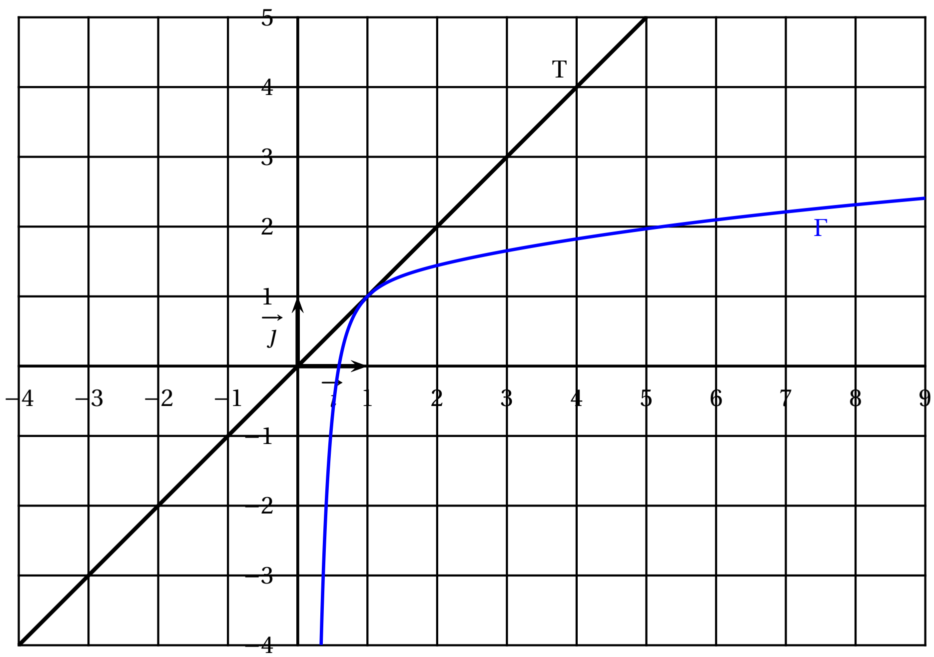
EXERCICE 2 **4 points**

1. On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par
   $$f(x) = 3x - 1 + \frac{1}{\text{e}^{2x}}.$$
   a. Montrer que la fonction dérivée f' est telle que $f'(x) = \dfrac{3\text{e}^{2x} - 2}{\text{e}^{2x}}$.
   b. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$, puis justifier l'existence d'un minimum et en donner la valeur exacte.
   c. Dresser le tableau de variations de f (les limites en $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas demandées).
2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 6x + 1$ où y est une fonction de la variable réelle x et y' sa dérivée.
   a. Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.
   b. Démontrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x - 1$ est solution de l'équation (E).
   c. Vérifier que la fonction f est solution de (E) et que $f(0) = 0$.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On donne dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la représentation graphique Γ d'une fonction g, définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty]$.
La droite T passant par O et A(1 ; 1) est tangente en A à la courbe Γ.
La courbe Γ admet pour asymptote verticale l'axe des ordonnées.



1. Déterminer graphiquement :

a. $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ **b.** $g(1)$ **c.** $g'(1)$.

2. On admet que, pour tout réel de l'intervalle $]0~;~+\infty]$,

$$g(x) = \ln x + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

a. Exprimer $g(1)$ et $g'(1)$ en fonction de a et b.

b. Déterminer a et b en utilisant les résultats précédents.

3. On suppose que g est définie sur $]0~;~+\infty]$ par $g(x) = \ln x + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$.

a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0,2~;~0,8]$; déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,01 et en déduire une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

b. En déduire, en utilisant le sens de variations de g, le signe de $g(x)$ sur $]0~;~+\infty]$.

Partie B : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty]$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \left(\ln x + \frac{1}{x}\right).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Vérifier que l'on peut écrire, pour tout x, appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty]$,

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}(x \ln x + 1).$$

c. En déduire la limite de f en 0 (on admettra que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$).

2. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et vérifier que, pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = g(x)\mathrm{e}^{x}$.
   b. En utilisant le signe de g obtenu précédemment, étudier le sens de variations de f sur $]0~;~+\infty[$.
3. **a.** Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
   b. Sur la feuille annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe $\mathscr{C}$. Sur cette figure, tracer la droite Δ.

Partie C : Calcul d'une aire

1. On note a un nombre réel tel que $0 < a < 1$.
   a. Montrer que la fonction h, définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par
   $h(x) = \mathrm{e}^{x}\ln x$ est une primitive de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$.
   b. En déduire que $\displaystyle\int_{a}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{a}\ln a$.
2. $\mathscr{D}$ désigne la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 1$.
   a. Sur la feuille annexe, hachurer le domaine $\mathscr{D}$.
   b. Calculer la valeur exacte de la mesure, exprimée en unités d'aire, de l'aire de $\mathscr{D}$.

Feuille annexe