Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Métropole 23 juin 2009 ∽
Génie électronique, électrotechnique, optique

Exercice 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Soit A le point d'affixe $z_A = 1 + i\sqrt{3}$.

a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_A.

b. Écrire le nombre complexe z_A sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

c. Placer le point A dans le repère $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ en prenant comme unité graphique 2 cm.

2. Soit B l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On appelle z_B l'affixe du point B.

a. Déterminer l'écriture du nombre complexe z_B sous la forme $re^{i\theta}$ (où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π).

b. Écrire le nombre complexe z_B sous forme algébrique.

c. Placer le point B dans le repère $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

3. Montrer que le triangle AOB est équilatéral.

4. Soit C le point d'affixe $z_C = z_A e^{i\frac{\pi}{4}}$.

a. Par quelle transformation géométrique le point C est-il l'image du point A ? Préciser les éléments caractéristiques de cette transformation.

b. Placer le point C dans le repère $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

c. Écrire le nombre complexe z_C sous forme trigonométrique.

d. Établir que $z_C = z_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

En déduire l'écriture du nombre complexe z_C sous forme algébrique.

e. Déduire des résultats précédents les valeurs exactes $\cos\frac{7\pi}{12}$ et de $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 2 **5 points**

On propose à un candidat au baccalauréat un exercice qui comporte trois questions auxquelles il doit répondre par vrai ou faux.
Une bonne réponse rapporte 2 points, une mauvaise réponse enlève 1 point, l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.
On appelle :

- A l'évènement : « le candidat n'a pas répondu à la question » ;
- B l'évènement : « le candidat a donné la bonne réponse à la question » ;

- C l'évènement : « le candidat a donné la mauvaise réponse à la question ».

Si, par exemple, le candidat a donné les bonnes réponses aux questions 1 et 2, et la mauvaise réponse à la question 3, le résultat obtenu se note (B, B, C).

Un candidat qui ne sait répondre à aucune question hésite entre deux stratégies :
— soit il répond au hasard aux trois questions;
— soit il décide de ne pas répondre à une question, par exemple la première, et répond au hasard aux deux autres questions.

I. Première stratégie : le candidat choisit de ne pas laisser de questions sans réponse.
Il répond donc au hasard et de façon équiprobable aux trois questions.

1. Combien de triplets différents peut-on obtenir? (On pourra utiliser un arbre.)
2. Calculer la probabilité que le candidat n'ait fait aucune faute. .
3. Montrer que la probabilité que le candidat ait fait une faute et une seule, est égale à $0,375$.
4. On note X la variable aléatoire qui à chaque triplet associe la note obtenue à l'exercice.
   a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

II. Deuxième stratégie : le candidat choisit de ne pas répondre à la première question, et répond au hasard et de façon équiprobable aux deux autres questions.

1. Combien de triplets différents peut-on obtenir?
2. On note Y la variable aléatoire qui à chaque triplet associe la note obtenue à l'exercice.
   a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y.
   b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.
   c. Calculer l'espérance mathématique E(Y) de la variable aléatoire Y.

III. Comparaison des stratégies : parmi les deux stratégies, quelle est la plus favorable au candidat?

PROBLÈME **10 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
On s'intéresse dans ce problème à une fonction f définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2\mathrm{e}^{x} + 2x + 3.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   Les limites ne sont pas demandées.
2. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2\,;\,-1]$.
   b. Donner l'arrondi au dixième de α.
   c. En déduire, selon les valeurs du nombre réel x, le signe de $g(x)$.

Partie B : Étude de la fonction *f*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{x} + x^2 + 3x.$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
3. Soit $\mathscr{P}$ la parabole d' équation $y = x^2 + 3x$.
   a. Déterminer la limite de $f(x) - \left(x^2 + 3x\right)$ quand x tend vers $-\infty$.
   b. Que peut-on en déduire graphiquement ?
   c. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la parabole $\mathscr{P}$.
4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x.
   b. En utilisant la question 2. c. de la partie A, dresser le tableau de variations de la fonction f.
   c. Donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près.
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
6. Sur la feuille annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la parabole $\mathscr{P}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, en prenant comme unité graphique 2 cm.
   Tracer sur cette feuille annexe la tangente T et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : Calcul d'aire

1. Hachurer sur la feuille annexe la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$.
2. a. Calculer la mesure exacte, en unités d'aire, de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan hachurée précédemment.
   b. En déduire, en cm^2, la mesure arrondie au centième de l'aire $\mathscr{A}$.

ANNEXE

Cette feuille est à rendre avec la copie