Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Métropole 23 juin 2008
Génie électrotechnique, optique

Le candidat est invité à faire figurer toute trace de recherche, même incomplète on non fructueuse, qu'il aura développée.
Deux feuilles de papier millimétré seront distribuées en même temps que le sujet.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + 6z\sqrt{3} + 36 = 0.$$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
   $z_{\text{A}} = -3\sqrt{3} + 3\text{i}$ $\quad$ $z_{\text{B}} = -3\sqrt{3} - 3\text{i}$ $\quad$ et $z_{\text{C}} = -6\sqrt{3}$.
   a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_{A} et z_{B}.
   b. Écrire le nombre complexe z_{A} sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.
   c. Placer les points A, B, C dans le plan muni du repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
3. **a.** Déterminer la nature du triangle ABC.
   b. En déduire que le quadrilatère OACB est un losange.
4. On appelle K le point du plan complexe d'ordonnée négative tel que le triangle OAK soit rectangle et isocèle en O.
   On note z_{K} l'affixe du point K.
   a. Construire le point K sur la figure.
   b. Par quelle rotation de centre O, le point K est-il l'image du point A ?
   c. Écrire alors z_{K}, sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ (où r est un nombre réel strictement positif et θ un réel compris entre $-\pi$ et π) puis sous forme algébrique.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère l'équation différentielle :

$$(\text{E}) : \quad y'' + 25y = 0$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation (E).
2. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont on note f' la fonction dérivée, vérifiant les trois conditions suivantes :
   - f est solution de l'équation différentielle (E) ;

- la courbe représentative de f dans un repère du plan passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{6}\ ;\ -2\right)$;
- $f'(0) = -5$.

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x$.

3. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$.
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{6}\right]$.

PROBLÈME **11 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.
On s'intéresse dans ce problème à la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \frac{3}{\text{e}^{3x} + 1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude de la fonction *f*

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
   c. Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout nombre réel x ; qu'en déduit-on sur la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à cette asymptote ?
2. On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 3$.
   a. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
   b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite $\mathscr{D}$ comme asymptote.
   c. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = 3 - \frac{3\text{e}^{3x}}{\text{e}^{3x} + 1}$.
   d. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{-9\text{e}^{3x}}{\left(\text{e}^{3x} + 1\right)^2}$.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations.
4. Déterminer une équation de la tangente Δ au point d'abscisse 0.
5. Dans le plan muni du repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ tracer les droites $\mathscr{D}$ et Δ ainsi que la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B : Calcul de l'aire d'une partie du plan

1. **a.** On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{3\text{e}^{3x}}{\text{e}^{3x} + 1}.$$

Déterminer une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$. (On pourra remarquer que la fonction g est de la forme $\frac{u'}{u}$ où u est une fonction que l'on précisera).

b. En utilisant la question 2. c. de la partie A, déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit a un réel strictement positif.

On note $\mathscr{A}(a)$ la mesure, exprimée en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.

a. Exprimer $\mathscr{A}(a)$ à l'aide d'une intégrale.

b. Établir que $\mathscr{A}(a) = 3a - \ln\left(\text{e}^{3a} + 1\right) + \ln 2$.

c. En remarquant que $3a = \ln\left(\text{e}^{3a}\right)$, écrire $\mathscr{A}(a)$ sous la forme du logarithme népérien d'un quotient ; déterminer alors la limite de $\mathscr{A}(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Dans cette question particulièrement, toute trace de recherche, même incomplète, figurant sur la copie sera prise en compte dans l'évaluation.