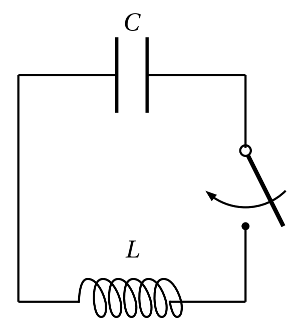
Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie électronique Métropole septembre 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Une feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **4 points**

On considère le circuit électronique ci-contre comprenant un condensateur dont la capacité, exprimée en farads, a pour valeur C, une bobine dont l'inductance, exprimée en henrys, a pour valeur L et un interrupteur. Le temps test exprimé en secondes.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit.
On appelle $q(t)$ la valeur de la charge, exprimée en coulombs, du condensateur à l'instant t.



On définit ainsi une fonction q, deux fois dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
On admet que la fonction q est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + \frac{1}{LC}y = 0.$$

où y est définie et deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et de dérivée seconde y''.
Dans tout l'exercice, on prend $C = 2 \times 10^{-3}$ et $L = 1,25 \times 10^{-2}$.

1. Prouver qu'alors l'équation différentielle (E) s'écrit :

$$y'' + 4 \times 10^4 y = 0.$$

2. Résoudre l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la fonction q sachant qu'elle est la solution particulière de (E) vérifiant :

$$q(0) = \frac{\sqrt{2}}{400} \quad \text{et} \quad q'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Montrer que pour tout t appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $q(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$q(t) = \frac{1}{200} \times \sin\left(200t + \frac{\pi}{4}\right).$$

5. Calculer la valeur moyenne q_m de la fonction q sur l'intervalle $\left[0~;~\frac{\pi}{800}\right]$.
   On donnera une valeur exacte.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans le hall d'accueil d'une gare téléphérique, trois appareils automatiques, (numérotés 1, 2 et 3) délivrent des tickets identiques d'une valeur de 20 €.
Deux personnes, que l'on désigne par les lettres M et N, se présentent dans cet ordre, chacune devant un appareil (éventuellement le même) choisi aléatoirement pour acheter un ticket.
On convient de noter $(a,~b)$ l'évènement élémentaire suivant : la personne M choisit l'appareil a et la personne N choisit l'appareil b.

1. Expliciter les neuf évènements élémentaires. On pourra s'aider d'un arbre ou d'un tableau.
2. On suppose que les neuf évènements élémentaires sont équiprobables.
   a. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   A : « seul l'appareil 2 a été utilisé » ;
   B : « un seul des trois appareils a été utilisé » ;
   C : « l'appareil 2 n'a pas été utilisé ».
   b. Les évènements A et C sont-ils contraires ? Justifier.
3. L'appareil 1 est déréglé, il réclame seulement 10 € pour le paiement d'un ticket d'une valeur de 20 €. Les clients l'ignorent jusqu'au paiement de leur ticket.
   On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque évènement élémentaire, associe la somme totale, exprimée en euros, payée par les deux personnes.
   a. Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b. Calculer la probabilité : $P(X = 20)$.
   c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   d. Calculer son espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$.
   On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au centième près.

PROBLÈME **12 points**

Partie A : Introduction d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{x} + x - 1.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction g puis dresser son tableau de variations (les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ ne sont pas demandées).
2. **a.** Vérifier que $g(0) = 0$.
   b. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 3 - x\mathrm{e}^{-x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Vérifier que, pour tout x réel non nul :
$$f(x) = x\left(1 - \frac{3}{x} - \mathrm{e}^{-x}\right).$$
   En déduire $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
2. **a.** Calculer : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite D d'équation : $y = x - 3$.
   c. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D.
3. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Pour tout nombre réel x, calculer $f'(x)$, puis vérifier que :

$$f'(x) = g(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

b. En utilisant les résultats de la **partie A**, déterminer le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. **a.** À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de $f(3)$ et de $f(4)$.

b. Prouver qu'il existe un nombre α, compris entre 3 et 4, tel que : $f(\alpha) = 0$.

c. Donner une valeur approchée de α au centième près.

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite D dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie C : Calcul d'aire

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On note h' la fonction dérivée de la fonction h. Calculer $h'(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

2. On appelle $\mathscr{A}$ la valeur, exprimée en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite D, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.
Donner la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis une valeur décimale approchée par excès à 10^{-2} près.